〈高校数学〉

数学的な考え方を育成する指導の工夫
── 三角関数における問題解決的な学習を通して ──

島　仲　利　泰 *　　　天　久　晴　令 **

Ⅰ　テーマ設定の理由

平成18年12月に教育基本法が約60年ぶりに改正され，これからの教育の新しい理念が定められた。この改正教育基本法や一部改正された学校教育法においては,「生きる力」を支える「確かな学力」,「豊かな心」,「健やかな体」の調和を重視するとともに，学力の重要な要素として，①基礎的・基本的な知識・技能の習得，②知識・技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等，③学習意欲が示されている。高等学校学習指導要領解説数学編においては，教育課程審議会「中間まとめ」の数学科の現状と課題で,「数量や図形についての基本的な知識や技能などについては比較的身に付いているものの，数学的な考え方を生かし自分から工夫して問題を解決したり判断したりすることについては十分とは言えない状況にある」ことが示されている。また，数学教育で「生きる力」を育むために，特に，創造性の基礎を培うことを強調している。その創造性の基礎として，基礎的・基本的な知識・技能の習得を基にして多面的にものを見る力や論理的に考える力などを例示している。学習指導にあたっては,「主体的に問題を解決する活動(数学的活動)」を通して,「学ぶことの楽しさや充実感」を味わい，数学の学習の意義が理解できるように重視することが求められている。

しかし，これまでの実際の指導では，問題の解法を効率よく伝えることのみが強調された授業になりやすく，問題を解く過程における生徒の構想の練り合いの場の設定や知識・技能を活用する学習活動の充実を重視できなかったことが多かったように思われる。生徒の主体的な学習を促し学習意欲を高め，学ぶことの楽しさや充実感を味わわせるためにも，教師主導の教え込むという指導を見直し，数学的活動を重視した場面を取り入れた数学的な考え方を育成する指導を検討する必要がある。なお，今日,「基礎的・基本的な知識・技能の習得」とともに「その知識・技能の活用」が重視されているが，活用型授業については，新しい取り組みということではなく，活用の視点からの授業づくりに立ち，これまで以上に質の高い授業が求められているものと捉えている。

そこで，本研究では，問題解決的な学習を通して，生徒に三角関数における問題づくりや既習の知識や技能を活用させ発展問題への取り組みをさせる。また，その過程で生徒一人一人が取り組みを振り返る自己評価活動を位置づけ自分の達成度状況を確認する取り組みを行う。これらにより，生徒一人一人が主体的な問題への取り組みのなかで数学的な考え方を育成することができるものと考え,本テーマを設定した。

実践事例として，県立那覇国際高等学校での取り組みを報告する。

〈研究仮説〉

三角関数の学習で，問題づくりを取り入れた問題解決的な学習を通して，学ぶことの楽しさや充実感・達成感を味わわせ，数学的な考察の方法を体得させて，既習の知識や技能を活用し発展問題への取り組みを可能にさせることにより，数学的な考え方を育成することができるだろう。

Ⅱ　研究内容

1　数学的活動

平成11年に改訂された学習指導要領では，その目標に「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という文言が新しく加えられた。数学的活動は，観察，操作，実験・実習などの外的な活動と，直観，類推，帰納，演繹などの内的な活動の二つに分けてとらえることができ，これらの活動が相互的かつ循環的に作用し，生徒が知的充足を高めていくことが大切である。高等学校ではさらに，図１のような思考活動を数学的活動ととらえ設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等その過程で見

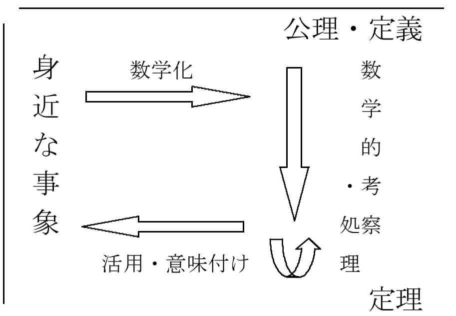

図１　数学的活動

＊沖縄県立総合教育センター指導主事　　　＊＊沖縄県立那覇国際高等学校教諭

いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し，数学の新しい理論・定理等を構成する活動等としている。

また，平成20年１月17日の中教審答申「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」の中で，算数，数学における改善の基本方針の中のひとつに「算数科，数学科については，７つの課題を踏まえ，小・中・高等学校を通じて，発達の段階に応じ，算数的活動・数学的活動を一層充実させ，基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け，数学的な思考力・表現力を育て，学ぶ意欲を高めるようにする。」と示され，数学的活動を一層充実させることが求められている。

数学的活動は，基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付けるとともに，数学的な思考力・表現力を高めたり，数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするために，重要な役割をはたすものであると考える。

２　数学的な考え方

松原元一(1990)によると，「数学的に考えるとは，課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階において，対象を集合としてとらえ，関数を設定し，当面の課題の解決に導くことである。」と説明している。また，「数学的に考えるとは，課題に直面したとき，それが数学的に解決すべきものであることを見抜き，数学眼(過去の経験すなわち学習)を働かせて解決することである。」ととらえている。これらをふまえ，数学の学習において，生徒に基礎知識を学ばせると同時に，数学的な考察の方法を体得させることが大切であると考える。そこで，生徒に解決すべき課題を与え，「自分なりの考え」をもたせ，筋道を立てて考え抜かせ，これまで得た知識や技能を活用して，自ら問題をつくり，その解答に取り組むという問題解決的な学習を取り入れる。その活動における解決にいたるまでの思考過程をふり返り，「自分なりの考え」を「根拠を明らかにし筋道を立てて考える力」に育てる場を設定した授業を展開することによって，数学的な考え方を育成することができると考える。

３　問題解決的な学習活動

(1) 問題解決的な学習について

高等学校学習指導要領解説数学編では，「数学的な見方や考え方には，大きく分けて数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方と，問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの見方や考え方とがある。」としている。後者は，問題解決等に当たり，問題を数学の対象としてとらえ，直観，類推などを用いて，いろいろな角度や観点から問題を数学的に考察，分析・処理したりするときの見方や考え方である。つまり，数学的な考え方を育むためには，問題を数学的に考察，分析・処理したりする場の設定が必要となってくる。図１で示した数学的活動は，問題解決的な学習との共通点が多いと考え，数学的な考え方を育成することを重視し，問題解決的な学習を取り入れる。問題解決的とは，文章題や問題を解くのみでなく，主体的に問題に取り組み，既習の知識や技能を生かして，新しい問題・課題を解決し，さらに新しい知識や技能を身につけていくことである。三角関数における問題づくりを数学的活動としてとらえ，授業形態に生徒自らが問題づくり・解答する時間を保障し，その思考過程をふり返る場面を設定する。また，生徒が他の生徒との相互作用を通して学びあい，より考えを深め，次の発展問題へ取り組めるようにする。このような生徒の主体的な活動において，自己評価を行い，自分の達成状況を確認できる指導形態を取り入れる。

(2) 問題づくりについて

竹内芳男・沢田利夫(1984)によると「生徒の問題づくりを取り入れた指導によって，数学的な考え方の中で，特に一般化や類推の考えを伸ばすことができる。数学の問題をつくるということは，数学的活動であり，創造的な活動である。」と説明している。また，問題づくりを取り入れた授業の有効性して，次の点を挙げている(表１)。

表１　問題づくりを取り入れた授業の有効性

①	すべての生徒が積極的に授業に参加する。
②	自分の力に応じてだれもが精いっぱい学習に励む。
③	数学に興味を感ずる。
④	発見の喜びが味わえる。
⑤	いつでも問題を発展させる態度がつくられる。
⑥	個別学習と集団学習の調和した授業が展開できる。

これまでの授業では，生徒は問題を与えられ，それを解くといった場合がほとんどであった。したがって，生徒にとって問題は，あくまでも他から与えられたできあいのものであり，しかも解いてしまえばそれで事終わるもの，あとは復習して理解度を深めるだけであった。しかし，このよう

な問題の扱いだけでは，生徒全員が，問題を自分のものとして受けとめることはまれだと考える。生徒に，問題を自分のものとして受けとめさせる手だてとして，問題の扱いを生徒が自らつくり，解いて自分の理解度を診断できるような場を設定する。つまり，問題の扱いを受身的なものから能動的なものに転換するのである。生徒に問題(この問題を原問題とする)を与え解答し理解させる。その問題の構成要素となっている部分を，類似なものや，より一般的なもの等に置きかえたり，その問題の逆を考えたりすること等を通して，新しい問題をつくり，自ら解決しようとするような主体的な学習活動を展開する。問題をつくり，それを解くことによって得られた知識は，必ずしも新しい知識とは限らないが，原問題についての深い理解をもたらすことが期待でき，このような学習活動の展開により，数学的な考え方を育成することができると考える。

(3) 問題解決的な学習の展開

数学的な考え方を育成し，生徒の学力向上を図るには，生徒に数学的活動を主体的に自分のものとして受け止めさせ，既習の知識や技能を活用して，生徒が自分で問題をつくり，それを解いて，その解答と思考過程等をふり返り，自己評価を通して自分の達成状況を確認し，次の段階の学習へ発展していくことが重要である。そこで，竹内芳男・沢田利夫の理論の典型的な例をもとに，問題解決的な学習の展開を右のようにまとめた(図２)。

① 練習問題(原問題)の理解
↓
② 練習問題から問題づくり
↓
③ 問題の解答
↓
④ 発展問題への取り組み
↓
⑤ 自己評価活動

図２　問題解決的な学習の展開

① 練習問題(原問題)の理解

竹内・沢田によると，「原問題としては，生徒の学力に適合し単純で理解しやすく，問題の構成要素が多様に変え得るもので，教科書の中にある日常の授業の流れの中に位置づく内容のものが望ましい。」としている。そこで，原問題として，表２の三角関数を含む関数の最大値・最小値に関する問題を設定する。この問題は，「変更可能な条件」が含まれており，また，「三角関数」と一学年で学習した「二次関数」を関連づける基本的なもので，両者を統合的に捉えさせ，学習を深化・発展させることが可能であると考える。

表２　原問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

② 練習問題から問題づくり

原問題をもとにして新しい問題をつくるよう発問し，まず個別に取り組ませ，生徒の反応を観察する。もしつくれない場合には，更にくだいた発問や例示するなど，助言を与える。竹内・沢田によると指示を最小限にとどめ，生徒の思考の自由性を保障する発問例は図３の通りである。

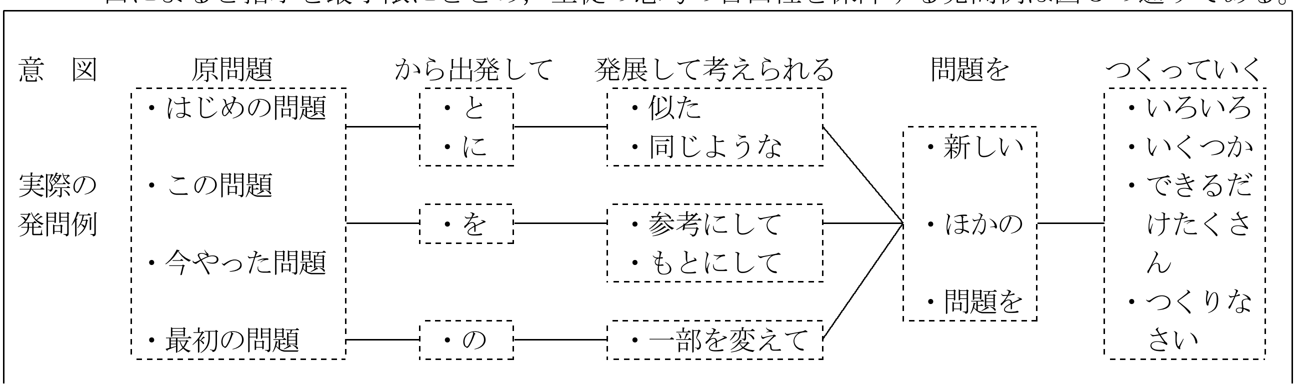

図３　発問例(竹内・沢田)

原問題をもとに，自分なりの新しい問題をつくらせるこの段階においては，生徒に「変更可能な部分に着目する」という問題づくりの手法を理解させる。問題づくりの際における生徒の反応は、既習事項に大きく左右される。つくれない場合には，発問を通して，生徒が既習事項と結びつけて操作をおこないやすいように，着目しなければならない要素「定義域の設定(θ の範囲)・三角比の値の範囲・三角比の相互関係・二次関数の最大値と最小値」等をあげ，随時確認していくようにする。

③ 問題の解答

生徒がつくった問題から１題を採用して，板書し，解答する。その後，採用した新しい問題が原問題をどのように発展させたのかを生徒に発表させ，生徒の問題づくりにおける思考過程をふり返る場をしっかりと設定する。原問題と新しくつくった問題とを比較検討することによって，問題の内容・構造をより深く理解できるようにする。

④　発展問題への取り組み

発展問題として，大学入試問題を取り入れる。その際，最初は発問を通しての支援はおこなわず，生徒の思考過程におけるつまずきや，変容状態を机間指導において把握する。個に応じた指導を意識し，うまく処理できていない生徒へは，問題づくりにおいて確認した着目しなければならない要素「定義域の確認（θ の範囲）・三角比の値の範囲・三角比の相互関係・二次関数の最大値と最小値」等をあげ，発問を通しての支援をおこなう。一斉に解答する際には，原問題のもつ数学的内容と関連づけて，発展問題への取り組みの深化を図る。

⑤　自己評価活動

授業は，主として数学的な考え方や処理のしかたの一面を経験させることをねらいとしたものである。そこで，問題のつくり方や発展のさせ方，自分で問題をつくる際及び発展問題への取り組み状況を，アンケートを利用し，生徒一人一人の思考過程のふり返りを確認することにより，数学的な考え方についての生徒の変容を捉えたいと考える。

(4) 問題解決的な学習の評価

評価に当たっては，生徒が問題を解くのみでなく，主体的に問題に取り組み，既習の知識や技能を活かして，新しい問題・課題を解決し，さらに新しい知識や技能を身につけていこうとする意欲や態度面に重点をおく。問題づくりを取り入れた指導によって，数学的な考え方の中の，特に一般化や類推の考えを伸ばすことが目標であるので，学習の結果のみではなく一人一人の生徒の学習過程（図２）をつぶさに観察し，積極的に評価していくことが大事であると考える。授業のヤマ場である問題づくりにおいては，表１に示した授業の有効性を参考に評価を考える。このように問題を発展させる授業は，主として「数学的な考え方や処理のしかたの一面を経験させる」ことをねらいとしたものである。しかし，この学習活動はもとより「基礎的・基本的な知識・技能の習得」を前提としており，生徒の主体的な活動を取り入れることで，得られた知識は，必ずしも新しい知識とは限らないが，問題についての深い理解をもたらすことが期待できる。

４　「学力向上」を図る継続した実践的指導

本県教育委員会が実施した「県内小中高の児童生徒の生活調査」の結果発表（平成19年４月）によると，高校生の61.9%が平日に家庭で勉強する時間は，「ほとんどない」と回答している。さらに，小学校から中学校，そして高等学校と進むにつれ，家でのんびりする割合が高くなっており，リポートや家庭学習ができるような教育活動を見直す必要があることが課題となっている。また，本県教育委員会発行『学校教育における指導の努力点』においても，「学習習慣の確立及び家庭学習の定着を図るため，生徒の興味・関心・意欲を高めるような課題や宿題の与え方を工夫する。」ことが挙げられている。「学習意欲の向上」，「学習習慣の形成」，「学習指導の充実」は，学習指導要領に示されている自ら学び自ら考えるなどの「生きる力」を育成することをねらいとし，「確かな学力」向上のための教科指導における基本理念である。

新学期当初から，授業を大切にし授業を「受ける」から授業を「活用する」に改めることの重要性と，数学学習は時間がかかって当然であることを随時確認する。生徒が板書を写すことのみに終始して授業に参加できていない，ということがないように，話し（説明）を集中して聞くことの必要性を常に強調する。授業において，生徒に質問をして自発を促す場面や，生徒の積極性を利用した演習を毎時間取り入れるようにする。その際，発問の仕方に細心の注意をはらい，生徒が考える時間を十分に確保することにより，思考力を育成するよう留意する。

宿題として，毎時間ごとに日々の課題（Ａ４版１枚）を，週末には週の課題（Ｂ４版２枚程度）を生徒に課している。宿題を出す際の工夫として日々の課題においては，授業内容が確認でき復習ができる問題（教科書の例題程度）であることに留意し，週の課題においては，時間がかかっても粘り強く自分の頭で考えることができる問題を取り入れるように留意し作成している。宿題の内容については，常に授業の中でフォローするようにしている。その際，生徒が提出した答案で，解決のアプローチが多岐にわたるもの，解決のアイデアが豊富なものについては，生徒の多様な発想を把握して，全体の場で確認し認めてやるように配慮している。また，授業と宿題（自宅学習）とのつながり・流れ及び，授

業の活用法や宿題(自宅学習)のやり方等を説明し，生徒を随時激励している。つまり，生徒が学習習慣の定着を図る手だてのひとつとして，日々の課題や週の課題等を作成し，宿題として生徒に課している。

授業を要としながら，生徒が学習習慣の定着を図り，それを維持していく自己学習力をつけることは，自ら学び自ら考えるなどの「生きる力」を育成することをねらいとし,「確かな学力」の確立のための要因のひとつであると考えている。この継続した実践的指導に，尚一層の創意工夫を凝らしながら生徒の主体的・積極的な学習活動を促す支援活動を含めた授業を展開し,生徒の学習意欲を高め,学力向上を図っていきたいと考える。

5　授業における「学習意欲」の向上策

学力向上を図るためには，基礎的・基本的な「知識や技能」に加え,「学ぶ意欲」や「思考力・判断力・表現力等」を含めた幅広い学力「確かな学力」を身に付けさせることが必要である。つまり，学力向上の前提として，生徒の学習意欲の喚起が先決問題である。

ＯＥＣＤ(経済協力開発機構)による学習到達度調査(ＰＩＳＡ2003)に関する文部科学省の分析では，学習意欲や学習習慣に課題があることなどが指摘されている。学習意欲や学習習慣に課題がある背景には，様々な要因があるが，学校現場においては，生徒が学ぶことの意味を把握し，学習意欲を喚起するような授業を展開していくことが重要である。

平成19年３月に国立教育政策研究所がまとめた『学習意欲向上のための総合的戦略に関する研究』によると,「授業における学習意欲の向上策の基本」のなかで，学習意欲の要因として，次の６点を示している(表３)。

表３　学習意欲の要因

① 子どものパーソナリティ特性が学習意欲に影響する
② 教師の指導性が学習意欲を左右する
③ 学習目標が把握され学習内容の意義が認識されると，学習意欲は充実する
④ 教材構成に工夫を加え，教材に問いを起こして探求するように図ると，学習意欲は高まる
⑤ 学習課題の達成のために助け合い協力するならば，学習意欲は促進される
⑥ 成功経験を重ねて有能感を増大し，自己決定の機会をもつと，学習意欲が強まる

また，これらの要因を子どもの人間存在から導き出される学習意欲向上の方策について，授業を念頭に置いて考察している。そのなかの⑥の要因において,「授業における学習の結果を考えると，有能感による学習意欲の向上が取り上げられる。学習課題を達成し，作品を完成すると，喜びが引き起こされ，満足感が生まれる。こうした学習の成功経験を重ねると，学習の有能感が増し育つ。有能感は効力感ともいうが，これがコンピテンスを生み出す。ホワイト(White,R.W.)は,『環境に積極的に働きかけ，自分にとって効果的な変化を生じさせようとする能力，その際に感じられる満足感及びそれをさらに求めようとする傾向』を指して，コンピテンス(competence)という。このコンピテンスが育つと，ますます学習意欲は強化される。」ことが示されている。

本研究では，この要因にも着目した授業を展開し，生徒の学習意欲を高め学力向上を図っていきたいと考えている。三角関数における問題づくりとして，原問題をもとに，自分なりの新しい問題をつくらせる。その自分でつくった問題を解答し，自分の達成状況を確認させる。その指導過程において，生徒の思考の自由性を保障する発問や例示を工夫する。そのことによって，生徒全員が問題をつくることができ，生徒自身が自分でつくった学習課題(問題)を達成(解答)できるようにし，生徒に喜びが引き起こり，満足感が生まれるように配慮する。そこでは，次の学習段階を意識して，原問題と新しくつくった問題とを比較検討することによって，生徒が問題の内容・構造をより深く理解できるように指導する。その満足感が生まれた成功経験をもとに，次の学習段階において発展問題である大学入試問題への取り組みを可能にさせるように指導を展開する。こうした一連の学習で生徒が成功経験を重ねることによって，学習の有能感を増し，生徒の学習意欲を高め，学力向上を図っていきたいと考える。

Ⅲ　指導の実際

実践事例 ……………………… 高等学校の実践より　沖縄県立那覇国際高等学校教諭　天久晴令

1　単 元 名　三角関数

２　単元目標　三角関数について理解し，関数についての理解を深め，それを具体的な事象に活用できる基礎を確立するため，次の各項を目標として指導する。

(1) 回転運動を考えることによって，一般角の概念を理解させる。

(2) 角の大きさの測り方として弧度法を取り入れ，その有用性を理解させる。

(3) 座標平面上の点の座標をもとにして三角関数を定義し，それから導かれる基本的な諸性質を取り扱う。

(4) 三角関数のグラフをかくとともに，周期性，グラフの対称性などに関する理解を深める。

(5) 三角関数の加法定理を導き，正しく扱えるように習熟させる。また，これから導かれる種々の等式を指導し，三角関数の合成の公式までを扱う。

３　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
・回転運動を考えることから，角度を一般化することにより，新たな関数が定義できることに関心をもつ。 ・加法定理から導き出される基本的な公式に関心をもち，種々の公式を導き出そうとする。	・角度が一般角に拡張されることや弧度法を取り入れ三角関数について，考察することができる。 ・三角関数のグラフで，周期性，対称性などの基本的な性質を考察することができる。 ・三角関数の最大，最小の問題を二次関数の問題に帰着させて考えることができる。 ・いろいろな公式と加法定理について考察することができる。	・弧度法で角を表すことができる。 ・弧の長さや扇形の面積を求めることができる。 ・三角関数のグラフを表すことができ，三角方程式や不等式などに活用することができる。 ・三角関数を含む関数の最大値，最小値を求めることができる。 ・加法定理を具体的な事象に活用することができる。	・弧度法により弧の長さや扇形の面積が求められるなどの有用性について理解する。 ・三角関数の周期性について理解を深め，加法定理やグラフを用いて具体的な事象に活用することが身に付いている。 ・加法定理を正しく扱い，種々の等式や三角関数の合成の公式を理解する知識を身に付けている。

４　指導計画(全２３時間)

節	項　目	指　導　内　容	配当時間
三角関数	１　一般角と弧度法	一般角，動径の表す角，弧度法， 扇形の弧の長さと面積	２時間
	２　三角関数	一般角の三角関数の定義，三角関数の値，三角関数の符号，三角関数の値の範囲，三角関数の相互関係，三角関数を含む等式の証明，三角関数を含む式の値	２時間
	３　三角関数の性質	θ＋２ｎπ，－θ，θ＋π，θ＋π／２，π－θ， π／２－θの三角関数	１時間
	４　三角関数のグラフ	ｙ＝sin θ，ｙ＝cos θ，ｙ＝tan θのグラフ 三角関数のグラフの特徴，周期関数， いろいろな三角関数のグラフ	４時間
	５　三角関数の応用	三角関数を含む方程式，三角関数を含む不等式 三角関数を含む関数の最大値，最小値	３時間 本時：３時間目
	問題演習		１時間
加法定理	６　加法定理	正弦・余弦の加法定理，正接の加法定理， ２直線のなす角	３時間
	７　加法定理の応用	２倍角の公式，半角の公式， 三角関数を含む方程式，不等式	２時間
	８　三角関数の合成	三角関数の合成，三角関数の合成の応用	２時間
	問題演習		１時間
	演習問題		１時間
	定着テスト		１時間

５　本時の学習指導

(1) 主題　「三角関数における問題づくり」

(2) 本時の目標

問題づくりを通して，主体的に問題に取り組み，既習の知識や技能を活かして発展問題に取り組むことができる。

(3) 本時の評価規準

三角関数の最大値・最小値の問題を二次関数の最大値・最小値の問題に帰着させて考えることができる。【数学的な見方や考え方】

三角関数を含む関数の最大値・最小値を求めることができる。【表現・処理】

(4) 本時の展開

過程	学習内容と展開	指導上の留意点	評価の観点
導入 (復習) (５分)	①三角関数の値の確認。②三角関数の相互関係の確認。(ノートさせない)	一般角に対する三角関数の定義を再確認し，単位円を用いて①②を確認する。	
問題演習 【原問題】 (15分)	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。 ※問題文をノートに写させる。 ※ $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ のグラフがどうなるか投げかける。 ※ $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ をどのようにしたら良いか投げかけ，考えさせる。 ※二次関数の問題に帰着させることができることを確認し，新しい変数の変域に注意させながら，解答する。	$y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ のグラフを黒板で示し，数学Ⅱの範囲では，このグラフをかくことはできないことを説明する。 生徒自ら気が付くまで根気強く考えさせる場面を設定し，生徒が自主的，主体的に取り組む学習の場とする。解決につまずいている生徒を，机間指導で援助する。	三角関数の最大値，最小値の問題を二次関数の最大値，最小値の問題に帰着させて考えることができる。 【数学的な見方や考え方】
問題 づくり (20分)	原問題をもとに，既習の知識や技能を生かして，自分なりの新しい問題をつくらせ，解答する場面を設定する。 生徒がつくった問題をとりあげ，解答する。	新しくつくった問題をとりあげ解答する際，発問を工夫し，生徒が作問の過程における思考を振り返り，問題の内容・構造をより深く理解できるようにする。	
発展問題 (15分)	$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で，$y = \sin\theta + 2\cos^2\theta - 2$ の最大値と最小値を求めよ。(大阪国際大) 本日の授業を通して学んだことや感じたことを自己評価用紙に記入させる。作問における思考過程が，発展問題への取り組み状況に変容をもたらしたかどうかを生徒に問いかける。	本時の学習を定着させる為，問題を補充することを説明する。時間を十分に確保し，問題に取り組ませるようにする。その際，手順を踏まえて考察するよう，生徒に指示をする。 生徒が問題づくりにおける思考過程をふり返り，気づいたこと・考えたことを自由にかく場面を設定する。(自己評価用紙)	三角関数を含む関数の最大値・最小値を求めることができる。 【表現・処理】
まとめ 次時予告 課題配布 (５分)	三角関数の最大値・最小値の問題を二次関数の最大値・最小値の問題に帰着させることができる。 次時は，問題演習	このような考え方は，他の関数(次章で学習する対数関数等)をはじめ様々な場面で現れるので，しっかりと確認する。	

(5) 学習指導上の工夫

数学的な考え方を育成するために，本授業では，次のような点に留意し，工夫をもって取り組んでいく。

① 問題解決に当たっての数学的な見方や考え方の糸口は，復習の部分で一斉に示すが，生徒自ら気が付くまで根気強く考えさせる場面を設定する。生徒に教科書の問題文をノートにかかせるこ

とによって，「自分なりの考え」をもたせ，教え込むのではなく，生徒が自主的，主体的に取り組む学習の場とする。

② 問題づくりを通して，「自分なりの考え」をもち，その「考えを表現する」場を設定する。また，自分なりの考えで作問した問題を解答する場面においては，学習の有用性を感得させ，学習意欲を高める工夫をする。

③ 作問した問題を生徒に板書してもらい，教師が解答する場面を設定する。ここでは生徒に，「授業を大切にする」「授業を活用する」ことの重要性を理解させる。また，生徒自らが授業に積極的に参加しようという意欲と，参加できるという自信を持ち，生徒自身が「授業に参加した」「授業が理解できた」という達成感や成就感を味わえるように授業を構成する。

④ 作問した問題を取りあげ，つくった問題が原問題をどのように発展させたのか，作問における思考過程を生徒にふり返らせ，「自分なりの考え」を「根拠を明らかにし筋道を立てて考える力」を育成する場をしっかりと設定する。

６　仮説の検証

三角関数の学習で，問題づくりを取り入れた問題解決的な学習活動を通して，発展問題への取り組みを可能にさせることにより，「数学的な考え方を育成することができたか」を検証授業における実践，ワークシート，自己評価及びアンケートによって検証する。

(1) 問題解決的な学習と数学的な考え方について

問題づくりへの取り組み状況から，数学的な考え方の観点を自己評価させた。問題づくりにおいては，図４のように生徒全員が自分なりの新しい問題をつくることができており，各自つくった問題を積極的に解答していた。表４は生徒のつくった問題を分類したものである。原問題をもとに，変更可能な条件(部分)に着目し，生徒全員が新しい問題をつくることができており，既習事項の三角比の値の範囲・三角比の相互関係等を活用して筋道(見通し)を立てて取り組んでいると考えられる。なお，生徒のつくった問題で，学習題として解決できるものが37題中36題，解決できないものが１題であった。表５は，問題づくりにおける生徒の理解度である。

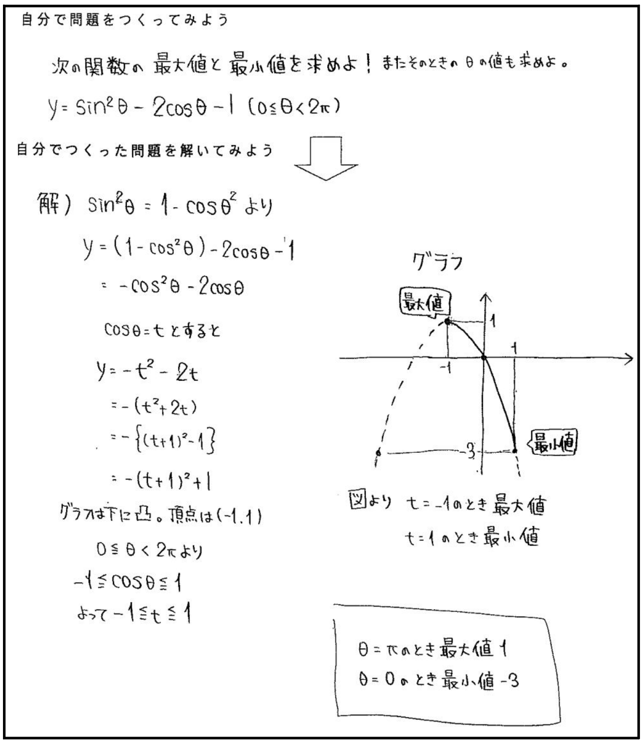

図４　問題づくりへの取り組み状況

表４　生徒のつくった問題の分類

分類の観点		反応数
定義域を変える	$0\leqq\theta<2\pi$	１７
	$0\leqq\theta\leqq2\pi$	1
	$0\leqq\theta<\pi$	7
	$0\leqq\theta\leqq\pi$	8
	$0\leqq\theta\leqq3/2\pi$	1
	$0<\theta<4\pi$	1
	$\pi<\theta<2\pi$	1
	$\pi\leqq\theta\leqq2\pi$	1
関数を変える（含まれる三角関数）	$\sin^2\theta$，$\sin\theta$	6
	$\cos^2\theta$，$\cos\theta$	4
	$\sin^2\theta$，$\cos\theta$	5
	$\cos^2\theta$，$\sin\theta$	１６
	$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$	1
	$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\sin\theta$	1
	$\sin^2\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$	1
	$\tan^2\theta$，$\cos\theta$	1
	$\sin^2\theta$，$\sin\theta$，変数 a	1
	$\cos\theta$	1

また，「自分で問題をつくり解答することで積極的に授業に参加することができましたか」の質問において，37名の生徒全員が「できた」と回答しており，問題づくりを取り入れた授業の有効性があると考える。

表５　問題づくりにおける生徒の理解度

最大値・最小値ともに正答	７８％(２９名)
最大値・最小値の一方のみ正答	８％(　３名)
最大値・最小値ともに誤答	１４％(　５名)

表６は，「問題をつくっているとき，どのようなことを考えて問題をつくりましたか」の質問において，生徒の問題解決の過程における取り組みの状況をまとめたものである。自らの思考過程をふり返るなかで，生徒なりに発展的に考えたり，数学的考察・処理の質を高めようとしていることがわかる。

表６　問題解決の過程における取り組み状況（問題をつくったときの生徒の考え方）

・自分の好きな公式とか入れたいと思ってつくりました。めんどうくさい計算にしたくなかったので符号に気をつけました。
・教科書では「$0 \leqq \theta < 2\pi$」の範囲であったから，自分は「$0 \leqq \theta \leqq \pi$」で，関数の最大値と最小値を求めた。
・意外にすんなり解ける！みたいに，ひらめくと簡単な問題をつくろうとした。
・教科書の問題を参考に，自分にとって難しい問題を作った。
・θの範囲を$0 \leqq \theta < 90^\circ$ など難しくする。
・答えが分数にならないようにした。
・$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$という公式が使えるように作った。
・解いている途中に作りかえました。
・問題と自分の考えている答えが矛盾しないようにした。
・平方完成するとき割り切れるようにした。

平成17年に国立教育政策研究所が実施した高等学校教育課程実施状況調査におけるペーパーテスト調査の結果概要において，「三角比の相互関係に関する問題」の通過率は約45%，「鈍角の三角比の理解をみる問題」の通過率は約35%であった。また，図４の問題づくりへの取り組み状況，表５の生徒の理解度及び表６の問題をつくったときの生徒の考え方から生徒一人一人が，既習の知識・技能（既習事項）を生かして筋道（見通し）を立て問題に取り組んでいることが考えられる。以上のことから，今回の手だては数学的な考え方を育成するのに有効だったと考える。また，この段階において，生徒全員が新しい問題をつくることができており，各自つくった問題を積極的に解答していたことや生徒の理解度の状況等から鑑みて，学習課題を達成した満足感が生まれたと考える。

(2) 数学的な考え方の育成について

①　発展問題への取り組み状況から

発展問題として，大学入試問題を取り入れた。生徒のワークシートから発展問題への取り組み状況を分析すると，図５のように37名の生徒全員が三角関数の最大値・最小値の問題を二次関数の最大値・最小値の問題に帰着させて考察することができていた。また，「自分で問題をつくり解答することによって発展問題（入試問題）の理解度が深まりましたか」の質問において，「深まった」という生徒が78%であった。表７は検証授業における発展問題の正答率で，最大値・最小値ともに正答率は80%を超える結果となっている。

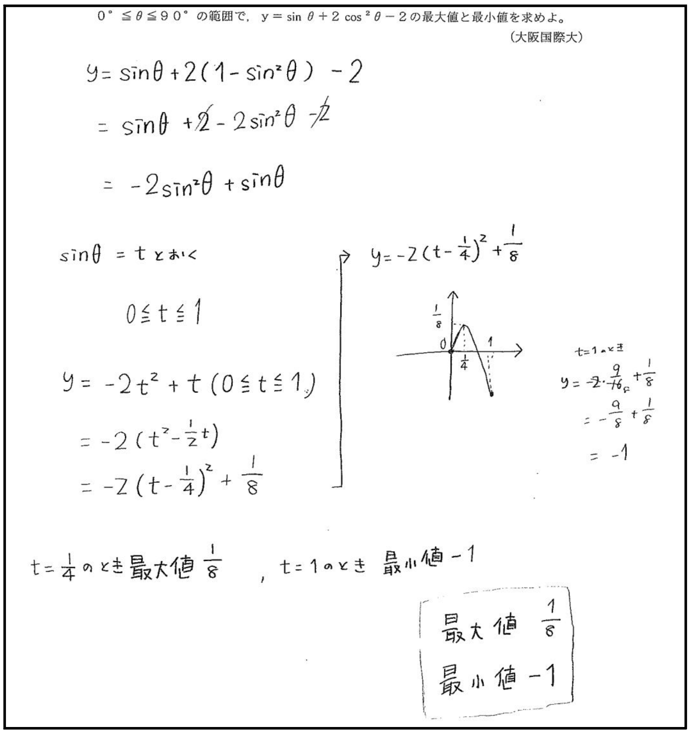

図５　発展問題への取り組み状況

教育課程実施状況調査における質問紙調査の結果概要において，「三角比の意味や三角比の相互関係」で，「よく分かった」と回答した生徒の割合は32.8%，「二次関数の最大・最小」で，「よく分かった」と回答した生徒の割合は，34.3%であった。今回取り入れた発展問題は，三角比の相互関係を利用し，三角関数の最大値・最小値の問題を二次関数の最大値・最小値の問題に帰着させる問題である。以上のことから，今回の手だては数学的な考え方を育むのに有効だったと考える。また，発展問題への取り組み状況や正答率等から鑑みて，この学習段階においても前の学習段階に引き続き満

表７　発展問題の正答率

分類	最大値	最小値
正答	８６%（３２名）	８１%（３０名）
誤答	１４%（　５名）	１９%（　７名）
無答	０%（　０名）	０%（　０名）

足感が生まれたと考える。こうした一連の学習で生徒が成功経験を重ねることによって生徒の学習意欲を高めることができたと考える。

② 生徒の感想から

表６・表８の検証授業後のアンケートから，問題づくりを取り入れた問題解決的な学習のねらいである「学ぶことの楽しさや充実感・達成感」,「発展問題への取り組みの手応え」,「数学的な考え方」に関する感想が多く見られた。授業においては，形式的な計算方法や解法の習得のみに終始せず，基礎的・基本的な知識・技能をしっかりと習得させるとともに，知識・技能を活用する学習活動を組み立てていくことが大切である。また，途中段階では生徒の関心・意欲・態度の高まりに十分配慮した指導が必要であり，そうした指導が今後の生徒の主体的な学習活動につながっていくと考えられる。

表８ 生徒の感想（抜粋）

- 自分で作って自分で解くことで，ちゃんと自分が理解できているというのがわかった。
- 解けない所(自分がつまづいている部分)が分かって，そこを直すのには向いていると思います。
- 自分で問題を作るのは，難しかった！新しい感じでよかった！これを続けたら頭がよくなりそう！
- 自分で問題を作るのは楽しかったが，どのくらいのレベルで問題を作った方がいいのか考えるべきだと思った。
- この問題の意味が分かったし，このパターンの問題の解き方を覚えられた。
- 問題を作っている段階では，答えがまだわからないから，解くときに，ちゃんとした答えになるかドキドキした。楽しかったです！
- 自分で作ることで，問題を解くときに，作る側の気持ちになって解く力がつくかなと思った。
- 自分で問題を作って取り組むことで，理解が深まると思う。
- 問題を作ることで自分なりの解き方を考える事が出来た。
- 作ったものを友達に解いてもらうといいと思う。
- みんなの問題を解いてみたいと思った。でも毎回取り入れたら教科書を進める時間がなくなりそう。
- 自分で問題をつくるとなると難しかったです。

Ⅳ まとめと今後の課題

本研究では，「数学的な考え方を育成する指導の工夫」をテーマに，問題解決的な学習活動を通して，数学的な考え方の育成をめざして取り組んできた。その成果と課題をまとめる。

1 成果

- 生徒に考えるきっかけを与え，自ら解決しようとする主体的な学習活動を展開することによって，生徒は学ぶことの楽しさに気付き，自分の中にある能力を自分で引き出していくことができ，数学的な考え方を育成することができたと考える。
- 生徒一人一人が「自分なりの考え」をもち，既習の知識や技能を生かしてその「考えを表現する」ことにより，積極的に問題に取り組み，解決にいたるまでの思考過程をふり返り，自分の達成状況を確認することができ，その一連の過程で数学的な考え方を育成することができたと考える。
- 数学的な考察の方法を体得させ，生徒が成功経験を重ねることによって，自分への自信をもたせることができ，学習意欲を高めることができたと考える。

2 課題

- 「生徒に数学的な作業をさせる，問題を発見させる，考えさせる，説明させる，発表させる」等の数学的活動をともなう授業展開を常に意識して授業計画を立てる必要がある。
- 「数学的な思考力・表現力」を育成するために，生徒一人一人が自分の考えや意見を互いに認め合い，深め合う場面のある授業展開を工夫する必要がある。
- 「生きる力」を育むことを目指し，授業においては，知識・技能の習得のみをゴールとせず，思考力・判断力・表現力等の育成及び学ぶ意欲の向上に向けて，活用の視点から授業づくりに取り組むことが必要である。

〈主な参考文献〉

文部科学省 1999 『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』
松原元一 1990 『数学的見方考え方』 国土社
竹内芳男・沢田利夫 1984 『問題から問題へ』 東洋館出版