

〈へき地教育〉

小規模校において数理的に考察し表現する能力を高める指導の工夫 —集合学習や作問し発信する数学的活動を通して（第3学年）—

うるま市立伊計中学校教諭 具志堅 博 昭

I テーマ設定の理由

平成20年1月の中央教育審議会答申によれば、変化の激しい社会に対応できる主体性のある人間を育成するためには、自ら課題を見つけ考える力、柔軟な思考力、身に付けた知識や技能を活用して複雑な課題を解決する力及び他者との関係を築く力等、豊かな人間性を含む総合的な「知」を身につけることが必要とされている。中学校数学科においては、基礎的・基本的な知識及び技能を習得し、数学的に考える力をはぐくむとともに、数学のよさを知り、数学が生活に役立つことや数学と科学技術との関係などについての理解を深め、事象を数理的に考察する能力と態度を養うことが求められている。

本校は、沖縄本島中部の勝連半島の北東約12kmにある伊計島に位置する。現在は、周辺の島と橋で繋がっており、本島へも車で行き来できるようになっている。小学生が7名、中学生が6名の小中併置校で、全校児童生徒数13名の小規模校である。うち中学生は各学年2名ずつで、男子が4名、女子が2名である。穏やかな校風で、児童生徒は学年の垣根なく交流し、仲が良い。中学生全員が学校行事や地域の行事に積極的に参加し、豊年祭においては組踊の主役を務めるなど、地域の行事には欠かせない役割を果たしている。基本的な生活習慣は概ね確立し、学習規律も身につけており、平成22年度沖縄県学力到達度調査においては、数学A・数学Bともに県平均を上回る結果であった。

これまでの指導を振り返ると、普段の授業の流れを、予習による先行学習、学習目標を明示しての丁寧な説明、既習事項を利用して解く理解深化課題、終末での記述による自己評価、という一連のサイクルに確立させたことで、基礎的・基本的な知識・技能を身に付けさせる上で一定の成果を得た。一方で、解き方の根拠を問う問題において数学的な用語を用いて筋道を立てて説明させる場面では、説明の受け手が生徒ひとりと教師に限られるため、自分の思いや考えを複数の人に伝える機会が少なかった。また、他者の意見を聴いたり練り合ったりすることが少なく、多様な考えに触れ、自分では気付かなかった新しい視点をもたらすような他者とのコミュニケーションの機会が不足していた。そのため、既習事項を活用して解く適用問題を解決することは出来るが、習得した知識・技能を使って思考を発展させて解くような応用問題では、なかなか解決まで至らないことがあった。これは、考察した内容を他者へ分かりやすく伝える学習活動の設定など、数理的に考察し表現する能力を高めるための指導が不十分であったため、と考える。

このような課題に対応するには、小規模校であることで柔軟かつ多様な指導を導入しやすいというメリットを活かし、習得した知識・技能を活用する学習活動をバランスよく取り入れることや、学級や学校の枠を超えて集団を形成するなどの学習形態の工夫が必要と考える。これらは、「平成23年度学校教育における指導の努力点」（沖縄県教育委員会）においても、「へき地の学校においては、少人数・複式学級における学習指導の改善・充実を図るとともに、合同学習、集合学習、交流学習を積極的に推進し、児童生徒の自主性・社会性をはぐくむことが必要である」と示されている。

そこで本研究では、数学の授業において、集合学習における説明し伝え合う活動や、習得した知識・技能を活用して作成した問題を遠隔地にいる生徒に発信する数学的活動を取り入れることにより、多様な考え方に触れることとなり、自分では気付かなかった新しい視点を獲得し、事象を数理的に考察し表現する能力が高まると考え、本テーマを設定した。

〈研究仮説〉

小規模校における数学科「数と式」領域において、集合学習における説明し伝え合う活動や、既習事項を活用した自作問題を情報通信ネットワークを介して発信する数学的活動をさせることにより、事象を数理的に考察し表現する能力が高まると考える。

II 研究内容

1 数理的に考察し表現する能力

(1) 事象を数理的に考察する能力

「事象を数理的に考察する」とは、様々な事象を数学的な概念や原理・法則に基づいて処理したり、解釈したり、表現したりしようとする思考過程と捉える。平成 20 年改訂「中学校学習指導要領解説数学編」（以下、「解説数学編」と略す）では、「事象を数理的に考察すること」とは、日常生活や社会における事象を数学的に定式化し、数学の手法によって処理し、その結果を現実にも照らして解釈する場合と、数学の世界における事象を簡潔な処理しやすい形に表現し適切な方法を選んで能率的に処理したり、その結果を発展的に考えたりすることの二つの場面で行われるとされている。中学校数学科では、日常的なものにとどまらず、数の性質を発展させて見いだし推測したものを根拠に基づいて説明し新しい性質を導くというような、数学の世界における様々な事象を数理的に考察する能力を高めることが必要とされる。このことは、現実の世界における様々な課題を解決するときの柔軟な思考力を生み出し、身に付けた知識・技能の中から何をどのように活用すれば課題の解決に向かうかといった判断の支えとなるものである。「事象を数理的に考察する能力」は、表現することで初めて、それが問題の解決の手立てとして有効かどうか分かり、表現を繰り返すことで、考えたり判断したりしたことを振り返って確かめることができ、相乗的に深まっていくと考える。

(2) 数学的に表現する能力

平成 20 年改訂中学校学習指導要領の数学科の目標において、新たに「表現する能力」が加えられた。松元新一郎（2009）は、「数学的な表現とは、対象となるものを図、表、式、グラフや記号、用語などの数学特有の言語で表わしたものである。さらに、数学用語や数学特有の言葉の言い回しなども数学的な表現に入る」としている。「数学的に表現する能力」とは、このような表現を使つて的確かつ論理的に表現することができる力と捉える。「数学的に表現すること」は、事象を数理的に考察する過程でその思考を深める働きと、他者との関係を通してお互いに思考を深める働きがある。

「表現すること」により互いに自分の思いや考えを伝え合うことができ、見いだした数や図形の性質などを的確に表現できているか、根拠を示しながら相手に分かりやすく説明できているか、などの振り返りができ、表現の質が高められる。生徒に的確な表現や、分かりやすい説明をさせるための数学的な表現の指導のポイントをまとめると、次のようになる（表 1）。

表 1 数学的な表現の指導のポイント

表現力	表現力育成のための指導	指導の留意点
図の表現力	○問題提示の場面で教師が提示する図の重要性を認識して指導する。 ○図の表現形式をきちんと指導する。 ○図をかかせる指導を取り入れる。 ○同じ図を見ている、人によって見えているものが違うことを意識して指導する。	・図を必要以上に固定化しない。 ・図形の頂点や辺の正しい記号のふり方を意識させる。 ・証明に用いる図では、与えられた条件のみを意識してかかせる。 ・生徒の思考過程に沿ったヒントを出す。
表の表現力	○表をつくることの意味を考えさせる指導をする。 ○表の数値を検討させる指導を取り入れる。 ○表の正しい読み取り方を指導する。	・表は 2 つの数量関係の特徴を見極める道具であることを意識させる。 ・問題解決に必要な変数の組の取り方を意識させる。 ・縦の数量の関係を正しく読み取り、立式することを意識させる。
式の表現力	○表現の多様さを認識して指導する。 ○式から考え方を読み取らせる指導を取り入れる。	・等式や不等式の立式の考えの根拠を問う。 ・方程式が表す意味を予想させる発問をする。
グラフの表現力	○グラフは点の集合であることを指導する。 ○グラフを読み取らせる指導を取り入れる。 ○適切なグラフをかくことの重要性を認識して指導する。	・グラフが点の集合であることを意識させ、2 直線や曲線の交点の意味を理解させる。 ・変化の割合に着目するなどのグラフの読み取りの視点を与える。 ・課題解決に結びつく目盛りの取り方を考えさせる。
記号の表現力 用語の表現力	○記号の成り立ちや語源に基づいた表現をさせるよう指導する。 ○数学固有の用語や表現を確実に理解させる。 ○問題解決に用いる用語の意味と必要性を考えさせる指導をする。	・自然数を表す n や直線を表す l などの証明に用いる特別な記号の意味について意識させる。 ・帯分数を用いないことや円周率を π で表すなど、小学校と表し方が異なるものについて説明する。 ・資料の読み取りに適した代表値を選択させる。

(3) 数学的活動

「解説数学編」では、「数学的活動とは、生徒が目的意識を持って主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」と定義しており、「数学的活動を通して、数量や図形などについて実感を伴って理解したり、思考力、判断力、表現力等を高めたりできるようにするとともに、数学を学ぶことの楽しさや意義を実感できるようにするためには、生徒が目的意識を持って主体的に取り組む活動

となるように指導する必要がある」としている。日々の授業においては、以下の3つの類型（表2）に大別された数学的活動を、習得と活用のバランスを図りながら位置付けることが大切であると考ええる。

表2 数学的活動の類型

	第1学年	第2・3学年
ア 数学を生み出す活動	既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見いだす活動	既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見だし、発展させる活動
イ 数学を利用する活動	日常生活で、数学を利用する活動	日常生活や社会で、数学を利用する活動
ウ 数学的に説明し伝え合う活動	数学的な表現を用いて、自分なりに説明し伝え合う活動	数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動

2 小規模校における学習の集団化と数理的に考察し表現する能力の育成

(1) 小規模校における学習の集団化

1学級の児童生徒が少ない小規模校においては、学校をとりまく環境や、児童生徒一人一人の特性を把握し、それを指導に活かす様々な取り組みが行われている。地域素材を活用した異学年集団による総合的な学習や、特別活動を工夫した主体的・自主的活動の組織など、地域に根ざした教育や特色ある教育活動といった小規模校のよさを活かした学習活動が工夫されている。さらに、学習課題に応じた学習の集団化として、合同学習・集合学習・交流学习等が用いられている（表3）。

表3 へき地・小規模校における学習の集団形態

合同学習	一つの学校内で学級の枠を超えて、2学級以上の児童生徒と一緒に学習し、集団の中で考えを練り合って思考力を伸ばしたり、多人数での活動を楽しんだりする集団形態。
集合学習	近隣の2校以上の同学級の児童生徒または、各学校の全児童生徒を一か所に集めて、各学校の教師の協力によって学習指導を行う集団形態。全習（一か所で行われる学習）の前の分習（各学校での事前と事後の学習）が重要である。
交流学习	学校規模や生活環境の異なる学校（へき地の小規模校と都市の大規模校）同士が、姉妹校的な関係を結び、それぞれの学校独自では体験できない学習や、生活をさせる集団形態。

(2) 集合学習と数理的に考察し表現する能力との関わり

本校は各学年2名ずつ計6名の在籍で、学習面においては、日々の授業の工夫改善はもちろん、少人数であることの利点をいかし、放課後や長期休業期間における計画的な補習指導や、平成20年度学習指導要領の前倒しによる授業時数確保、一人一人の習熟の程度に応じた発展課題による家庭学習などの個に応じた指導の充実により、平成22年度沖縄県学力到達度調査において習得型、活用型、ともに良好な状況であるといえる。説明し伝え合う活動により、多様な考えに触れたり、習得した知識・技能を活用して発展させたりするためには、学習の集団化における言語活動の充実が必要である。そこで、同じような環境にある隣接する宮城島の中学校の生徒との集合学習を計画する。宮城中学校の生徒とは、これまでも音楽や体育などの体験的活動を重視した集合学習を年に数回行っており、レポートが取れている。そのことで、自分の考えを筋道立てて述べたり、相手の考えに対して自分の考えと比較して数学的に表現したりするなどの数学的コミュニケーションが活発に行われる。さらに、地理的に近いことは、移動時間のロスも少なく、教師間の打ち合わせの面でも効率化が図れる。

集合学習で取り上げる指導内容については、集団の拡大を図らなければ、目標達成が困難な内容や、自校でも指導が可能であるが、集団の拡大を図ることにより、より効果的に指導が展開できる内容であることなどの視点から精選し行わなければならない。さらに、教師の協働体制を確立し、指導目標や指導内容、授業時数などの位置づけや、既習内容の習得の状況等について共通理解し、事前・事後の分習の計画や、T・T方式による指導の役割などを連携し、綿密な指導計画のもと取り組む必要がある。

数理的に考察し表現する能力は、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、習得した数学的な表現や処理の仕方を活用して身に付く力である。これは、数学的活動を通してはぐくまれ高められるものである。その数学的活動のうち、数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動は、数の概念及びその範囲の拡張についての理解やユークリッド空間の把握及び関数についての理解など確定した事象並びに不確定な事象を確実に把握していく過程では重要である。このような活動における他者とのコミュニケーションは、一人では気付かなかった新しい視点をもたらし、筋道立てて説明する必要性を生み出す。本校のような小規模校においては、数学科による集合学習を通して、小グループによる説明し伝え合う数学的活動が

可能になる。伝えようとする相手にとって分かりやすいような数学的な表現を利用したり、自分とは異なる考え方にふれさせたりすることで、多様な考え方を身に付けさせることができ、数理的に考察し表現する能力が高まると考える。

3 作問し発信する数学的活動と数理的に考察し表現する能力の育成

作問学習は、習得した知識及び技能を活用して、生徒が独自の問題を作成することである。平嶋宗(2009)は、作問学習の効果について、「既存知識についての関係的理解の促進とともに、自身の問題解決や知識に対するメタ認知の経験とその能力の促進が期待できる」と述べている。

これまでも、作問学習の要素を取り入れた指導を行っていたが、多くの場合既存の問題の数字や語句を入れ替える程度であった。また、作成した問題を生徒同士で交換し評価し合うなどの機会を設けておらず、技能の習得の面では一定の効果があつたが、そこから新しい性質を見いだして、発展させるといった思考の深まりには結び付かなかつた。

そこで、作成した問題を他者へ解いてもらい評価してもらったり、その解き方を相手に分かりやすく説明したりする数学的コミュニケーションと組み合わせることで、作問における思考過程において拡張の考えや統合的な考え、一般化の考えというような数学的な見方や考え方が養われると考える。個人または小グループで課題に応じた問題を作成させ、それをメールなどを利用し他者へ発信したり、解き合ったり説明し合ったりするような相互に伝え合う活動を行わせることで、数学的に表現する力が高まるとともに、事象を数理的に考察し表現する能力が高まると考える(図1)。作問学習では、作成した問題の評価が困難であるという面がある。作成した問題が問題として成り立っているかといったことや、作成した問題に対する解の妥当性、さらに問題の難易性などを教師が細かくチェックしなければならないといった課題がある。また、情報通信ネットワークを利用した情報のやり取りにおいては、メディア・リテラシーへの配慮も重要である。

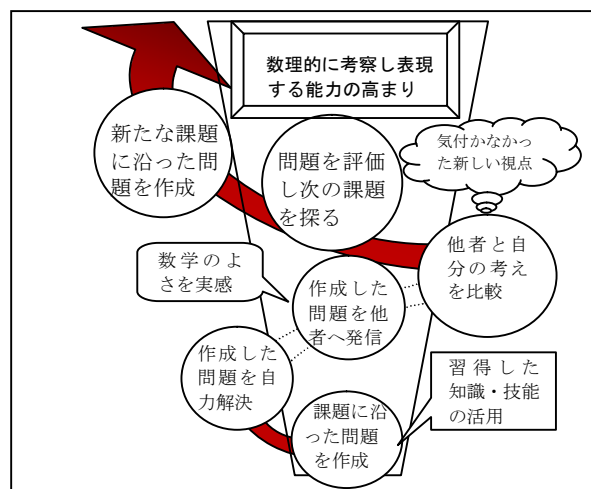


図1 作問し発信する学習のサイクル

Ⅲ 指導の実際

1 単元名

- (1) 式の計算の利用 (2) 2次方程式の利用

2 単元の見目標

- (1) 式の計算の利用

- ① 乗法公式や因数分解の公式を式の計算や証明に利用することができるようにする。
② 目的に応じて式を変形したり、利用したりすることができるようにする。

- (2) 2次方程式の利用

2次方程式を利用し、具体的な問題を解決することができるようにする。

3 単元の評価規準

- (1) 式の計算の利用

数学への 関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	数量、図形などにつ いての知識・理解
○文字を用いた式で数量や数量の関係をとらえ説明することに関心をもつ。 ○式の展開や因数分解を、数の計算や図形の性質の説明などに利用しようとしている。	○具体的な場面で、式を目的に合うように変形し、数の計算や図形の性質について考察することができる。 ○説明に用いた式の変形を振り返り、数や図形についての新たな性質などをよみとることができる。	○数量や数量の関係を、文字を用いた式で表すことができる。 ○具体的な場面で、目的に合うように式を変形したり、式をよみとったりすることができる。	○文字を用いて一般的に説明することの必要性和、文字を用いることのよさを理解している。

(2) 2次方程式の利用

数学への 関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	数量、図形などにつ いての知識・理解
○2次方程式を利用することに関心を持ち、2次方程式を利用して具体的な問題を解決しようとしている。	○具体的な問題で、数量の間の関係をとらえて2次方程式をつくることができる。 ○求めた答や解法が適切であったかどうかを、振り返って考えることができる。	○具体的な問題で、数量の間の関係を理解し、つくられた2次方程式を解いて答を求めることができる。	○2次方程式を利用して問題を解決する手順を理解している。 ○2次方程式では、解の吟味が必要であることを理解している。

4 指導計画

時数	授業のねらい	おもな学習課題	評価観点	数学的活動
第1時 習得	○問題解決に式の展開や因数分解を利用しようとする。 ○式の展開や因数分解を利用して、数の計算や図形の性質について考察することができる。	Q：速算法の仕組みを考え、文字式を用いて明らかにしよう。	関心意欲態 度 見方考え方	見だし発 展させる活 動
第2時 活用	○根号を含む式の計算に因数分解の公式を利用することができる。	Q： $x = \sqrt{3} + 2$ のとき、 $x^2 - 4x + 3$ の値をいろいろな方法で求めてみよう。	見方考え方	見だし発 展させる活 動
第3時 習得 活用 集合学習	○乗法公式や因数分解の公式を証明に利用することができる。 ○数の性質を見だし、証明問題を作成できる。	Q：2つの連続する偶数の積に1を加えると4の倍数になることをグループで説明しよう。 Q：数の性質を見だし、証明問題を作成しよう。	見方考え方	説明し伝え 合う活動 見だし発 展させる活 動
第4時 集合学習 本時	○見いだした数の性質について、式の展開や因数分解を利用して証明し、数学的な表現で伝え合い数学的な見方や考え方を高める。	Q：見いだした数の性質に関する証明問題の解き方を数学的な表現で説明しよう。	見方考え方	説明し伝え 合う活動
第5時 活用	○式の展開や因数分解を利用して、図形の性質について考察することができる。	Q：幅が一定である図形の面積の求め方を考察しよう。	見方考え方	数学を利用 する活動
第6時 習得 活用	○具体的な問題で、数量の間の関係をとらえて2次方程式を立式することができる。 ○2次方程式の解の吟味の必要性を理解する。	Q：長方形の紙の四隅から正方形を切り取り条件にあった直方体を作ろう。	関心意欲態 度 知識理解	数学を利用 する活動
第7時 活用 作問発信	○既習事項を活用し、2次方程式を用いて解決できる具体的な問題を作成することができる。	Q：2次方程式を利用して解決できる問題を作成し、その解き方を考え、他者へ発信しよう。	見方考え方	見だし発 展させる活 動
第8時 作問発信 本時	○作成した問題の解き方をメールを通して他者と比較し、いろいろな解き方を見いだすことができる。	Q：問題を解決する手順を説明し、解き方のよさに気付こう。	見方考え方	説明し伝え 合う活動
第9時 活用 作問発信	○これまでの学習を振り返りレポートにまとめることができる。	Q：解き方を比較し気付いたことや理解が深まったことをレポートにまとめよう。	見方考え方	見だし発 展させる活 動

5 本時の指導

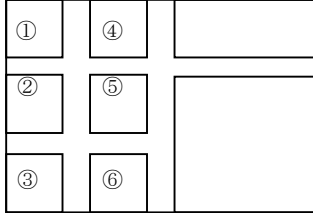
(1) 式の計算の利用（集合学習）

時間	形態	学習活動	予想される生徒の反応（◆） 教師の手立て（○）・指導の留意点（※）	評価の規準【観 点】 （評価方法）
5分	一斉	●学習目標を共書きする。	※教師の言葉を聴きながら同時に書き始め、教師と同時に書き終えさせる。	
導入		学習目標 数の性質を協力して見つけだし、その証明の方法を数学的な表現で説明できる。		
		●活動の流れを確認する。（4分） 今日の活動の流れ ① ノートを見せながら、自力解決した証明の方法についてグループ内で順番に発表する。 ② 聴き手は、説明者の理解を深めるために、できるだけ質問するようにする。 ③ 全員の説明が終わったら、グループとしての証明の方法を数学的な表現を使いワークシートにまとめ、ノートにかく。 ④ グループで作成した問題と証明をホワイトボードにかき、グループ内で順番に発表する。 ⑤ グループの代表者が全体へ発表する。代表者以外の方は、質問をメモし後で伝える。 ⑥ 聴き手は、説明者の理解を深めるために、分かっていることも質問するようにする。 ⑦ 質問に対して、分かりやすく説明をする。 ⑧ 他のグループの問題と証明をノートにかく。		

40分 展開	グループ	①ノートを見せながら、自力解決した証明の方法についてグループ内で順番に発表する。(5分)  ②聴き手は、説明者の理解を深めるために、分かっていることも質問するようにする。(5分) ③全員の説明が終わったら、グループとしての証明の方法を数学的な表現を使いワークシートにまとめ、ノートにかく。(5分) ④グループで作成した問題と証明をホワイトボードにかき、グループ内で順番に発表する。(5分)	【黄金芋グループが作成した問題】 2つの連続する偶数の積に1を加えると奇数の平方になる。このことを証明しなさい。 【紅芋グループが作成した問題】 ①奇数と偶数の積に1を加えると奇数になる。 ②3つの連続する整数の積は6の倍数になるになる。 ◆途中までしか、書けない。 ○書けた所まで発表させる。 ◆発表者に遠慮して質問を躊躇する。 ○質問者の発言により説明者の思考が深まることを伝える。 ◆式の変形を誤る。 ○誤りの箇所を指摘し、修正させる。 ◆数学的な表現がされていない。 ○ワークシートを見て、「証明の留意点」を確認させる。 ◆質問がでない。 ○発言により説明者の思考が深まることを伝え、積極的に質問するよう促す。	・見いだした数量の関係や法則を、数学的な表現を用いて説明できているか。【数学的な見方・考え方】(ノート、発表) ・質疑応答を通して、お互いに思考を深めることができたか。【数学的な見方・考え方】(発表)
	全体	⑤グループの代表者が全体へ発表する。代表者以外の人は、質問をメモし後で伝える。(5分) ⑥聴き手は、説明者の理解を深めるために、分かっていることも質問する。(5分)  ⑦質問に対して、分かりやすく説明する。(5分) ⑧他のグループの問題と証明をノートにかく。(5分)	◆質問に対して、的確な返答ができない。 ○グループのメンバーに補足させる。  ◆質問がでない。 ○教師が質問する。 ○解決の根拠が不十分な場合は、全体へ問い直す。(できるだけ、生徒に気付かせるようにする。) ※工夫した所やよい発言をほめる。	
	5分 まとめ	●学習目標が達成できたか考える。 ●ノートに自己評価をかく。 ●予習課題を確認し、家庭学習への意欲を持つ。 予習課題：新たな数の性質を見つけだし、その証明の方法を考える。	※本時の学習を通して得られたことを問いかける。 ◆自分では気付かなかった新しい視点で考えることができた。 ◆証明することのよさがわかった。	

(2) 2次方程式の利用(作問し発信する数学的活動)

時間	形態	学習活動	予想される生徒の反応(◆) 教師の手立て(○)・指導の留意点(※)	評価の規準 【観点】 (評価方法)
5分 導入	一斉	●学習目標をノートに共書きする。 学習目標 2次方程式を利用する問題の解き方を比較し、それぞれの解き方の良さに気付く ●学習の流れを把握する。 ●予習課題を確認する。 作問の条件 ①作問者自身が自力解決可能できる問題であること ②自分があまり得意でないパターンの問題であること	(事前に通信できる環境を整えておく) ※教師の言葉を聴きながら同時に書き始め、教師と同時に書き終えさせる。 ※前日までに相手に問題を送信しておく。 ◆相手が作成した問題の解決の見通しが立たない。 ○問題を図で表現させる。 ○既習事項を確認させる。	・積極的に2次方程式を活用しようとしたか【関心・意欲・態度】(ノート)

35分 展開	交流	問題A：伊計中の生徒が作成した問題 問題B：喜瀬武原中の生徒が作成した問題	※データの送信は、「美ら島e-net（遠隔学習）システム」の電子メールを活用する。生徒は、自校の教師に送信し、教師が相手校の生徒に送信する。	
		◇伊計中の生徒が作成した問題① 109本の対角線をもつ多角形があればそれを求めなさい。もしなければ、対角線の本数が109本に最も近い多角形を求めなさい。		・具体的な問題で、数量の間の関係を理解し、2次方程式を解いて答えを求めることができるか。【数学的な技能】（ノート）
		◇伊計中の生徒が作成した問題② 縦が横より3cm短い長方形がある。この長方形の縦の長さを3cm短くして横の長さを2倍にしても、面積は変わらない。このとき、もとの長方形の横の長さを求めなさい。		
		◇喜瀬武原中の生徒が作成した問題① あるパン屋には、1個あたりの原価が80円である人気商品のパンがあります。このパンの1個あたりの販売価格を100円にすると、1日に800個売れます。このパンの販売価格を1円値上げすると、1日に売れるパンは10個ずつ少なくなっていくそうです。この条件のもとで販売したとき、利益の最大は25,000円になりました。販売価格を何円にすると、利益は最大になりますか。販売価格を$(100+x)$円として求めなさい。 ※ 利益とは販売価格から原価を引いて、その値に1日あたりの売れた個数をかけた値とする。		
		◇喜瀬武原中の生徒が作成した問題② 縦20m、横35mの長方形の土地に、右の図のように同じ幅の通路をつくります。このとき①～⑥は合同な正方形であり、通路の面積がもとの土地の面積の半分になりました。道幅を求めなさい。  ●テレビ会議を通じてあいさつをする。 ①問題Bに対する答案データ（一太郎文書）を完成させ、送信する。（10分） ※電子メールの送信は、すべて教師を介して行う。 ②受信した問題Aに対する答案データを印刷し、自分達が考えた解決方法と比較する。（5分）  ③比較して気づいた点や感想などを電子文書として作成し、再送信する。（5分） ④再受信した問題Bに対する答案への相手の考えを読み取る。（5分） ⑤電子メールのやり取りによる両問題に対する疑問点などを質問し合い、相互に理解を深める。（5分） ●お礼をいう。	◆解き方の手順が間違っている。 ○前時で確認した方程式の解き方の手順を確認させる。 ◆数式の入力ができない。 ○入力の方法を教師が教える。 ○送信先のアドレスや、データが正しく添付されているかを確認し、教師が送信する。 ◆データがうまく開けない。 ○操作の手順を確認させる。 ○相手の誤操作の場合、その旨を電子メール等で相手に知らせ、対応してもらう。 ◆方程式の立て方が異なり戸惑う。 ○何をxとするかで、式の表現の多様性があることを理解させる。 ◆相手が立てた方程式の表す意味が分らない。 ○相手が立てた方程式が表す意味を予想させ、相手に電子メールで確認させる。 ◆方程式の解き方が異なる。 ○自分の解決の根拠を伝えさせた上で、相手の解決の根拠を聴き、お互いのよさを認め合わせる。 ◆自分の誤りや別の解き方に気付く。 ○参考になった所を相手に伝えさせる。 ◆自分の解き方が相手に理解してもらえない。 ○根拠となる事柄を噛み砕いて丁寧に記述させる。 ○図を用いるなど表現の工夫をさせる。 ○説明の中で、定義や定理などを使い分けて説明させる。 ※ネットワークを遮断する。	・質疑応答を通して思考を深めることができたか。【数学的な見方・考え方】（電子メール） ・作成した問題の解き方を、数学的な表現を用いて説明できているか。【数学的な見方・考え方】（ノート、電子メール）
10分まとめ	一斉	●解き方を比較し、参考になった点や気づいた点を発表する。 ●ノートに自己評価をかく。 ●予習課題を確認し、家庭学習への意欲を持つ。	※方程式を解く手順の誤りや、題意をみたまの条件に見落とし等があれば、指摘し再考を促す。 予習課題 作成した問題や解き方を比較し、ノートに気付いたことをかく。（次時で、レポートにまとめる）	

6 仮説の検証

研究仮説に基づき、数学科授業実践として、集合学習や作問し発信する数学的活動による数理的に考察し表現する能力を高める指導を行った。数理的に考察し表現する能力を高めることができたかを判断するために、授業実践記録、生徒の発表や電子メールの記録、生徒のノート記述、授業後の振り返りレポート及びアンケート、事前事後アンケートから指導の有効性を検証する。

(1) 集合学習による数理的に考察し表現する能力の高まり

集合学習を計画するにあたり、指導内容としての単元がふさわしいかを両校の教師で検討した。単元は「式の計算の利用」とし、数の性質をグループで見つけ出し、その証明問題をグループで解決させて説明し伝え合う活動を設定した。計画するにあたり生徒の習熟の程度等を把握し、学校行事との兼ね合いや授業進度を見極めながら、集合学習の実施日や場所を決定した。さらに、事前・事後の分習の計画や集合学習当日の授業における教師の役割分担、授業のねらいや形態などの細かい打ち合わせを行った。1回目の集合学習では、「式の計算の利用」に関する問題を教師が提示し、その理解確認の場として、グループ内で説明をさせた。その後、見いだした数の性質についての証明問題をグループで作成させた。2回目の集合学習では、前回グループで考えた証明問題の解き方について、自力解決をもとに話し合いをさせ、グループ内での発表を経て、全体場で発表させた。グループ内では気付かなかった文字の使い方の間違いを、別のグループの生徒が指摘する場面があった。集合学習を終えての感想(表4)の記述からも、集合学習での説明し伝え合う活動は、問題の多様性や考え方の多様性への認識の高まりを生み、数理的に考察し表現する能力を高めることに有効であると考ええる。さらに、グループによる学習活動で「数学のよさ」を実感していることがわかる。

学習の振り返りとしてレポートをかかせた。まとめの記述(図2)から分かるように、説明し伝え合う活動は、自分の考え方を振り返って確かめ、多様なものの見方や考え方に触れることができ、文字を用いることの有用性や証明することの意義を理解するなど、数理的に考察し表現する能力を高めることに有効である。また、表現の質を高めようとする態度もうかがえる。

(2) 作問し発信する数学的活動による数理的に考察し表現する能力の高まり

① 発信する相手を意識した作問学習

作問し発信する数学的活動として、2次方程式を利用して解決できるような文章題の作成を課題として提示した。今回は、作成した問題を相手に発信し、解き方を説明し伝え合わせることによる数理的に考察し表現する能力の高まりをねらいとしたので、「作問者自身が自力解決できる問題であること」と、作問することにより自分自身と向き合わせるために「自分があまり得意でないパターンの問題であること」を、作問の前提条件とした。解く側には、文章題の意

表4 集合学習を終えての感想

生徒の感想	考察
①自分では気付けないことも他の人は気付けることがあったり、いろいろな考えがでたりしておもしろかった。	問題づくりを取り入れた授業による問題の多様性と、説明し伝え合う活動による考え方の多様性に対する認識の高まり
②証明の方法で、いろいろなかつこのくり方があるのがわかった。難しい問題もみんなで話し合えば解ける気になり、楽しかった。	
③全体での発表の時に、3人で協力して証明を分かりやすく書きなおすことができた。	他者と関わる活動を通して、自分の考えを見つめ直し、表現や考えの質の高まり
④グループで話し合ったり、一人一人ホワイトボードで証明したりして、とてもわかりやすくいい勉強になった。	ともに学ぶ学習集団において、証明することの意義などの数学のよさの実感

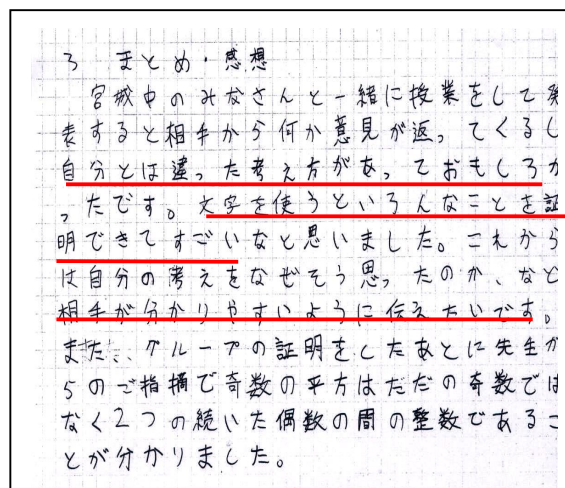


図2 授業後の振り返りレポートの記述例

はじめに作成した問題(因数分解を利用して解ける問題)	
問題	対角線の本数が104本である多角形を求めなさい。
↓	
最終的に作成した問題(因数分解が利用できない問題)	
問題	109本の対角線をもつ多角形があればそれを求めなさい。もしなければ、対角線の本数が109本に最も近い多角形を求めなさい。
※109は今年で閉校する本校の創立年度	

図3 生徒Aの作問の変容

味を読み取って欲しいと考え、可能な限り問題文に図を加えないようにして作成させた。発信する相手を意識した問題づくりにより、簡潔な文章の中で問題として必要な条件を的確に入れることや、自ら創り出した問題への責任感から、その問題に対するすべての質問に答えられるようにするため、文章題の端から端まで読み込む態度が見られた。問題づくりのはじめの段階では、因数分解を利用して比較的容易に解ける問題であったが、「因数分解を利用できない問題にするとどうなるかな」という教師の声かけにより、解の公式を利用したり、無理数の近似値を求めたりする多様な考えを引き出す問題へ変容した（図3）。自身が作成した問題をノートに解く段階では、普段解いているような、解を求めるための解き方であった。その後、発信するための電子文書作成の段階では、発信する相手が答案を読んで納得できるように、筋道立てて説明するように表現を工夫する中で、変数 n の変域のあいまいさに気付くことができた（図4）。このように、発信する相手を意識した作問学習は、既習の数学を活用し、根拠を明らかにして簡潔で的確な表現の必要性を生み、数理的に考察し表現する能力を高めることに有効であると考えられる。

解を求めるときの表現 (生徒ノート)

発信する相手を意識した表現 (電子文書)

図4 生徒Aが作成した問題の解き方における表現の変容

② 情報通信ネットワークを介した数学的活動

生徒個々の数理的に考察し表現する能力を高めるため、遠隔地にいる生徒との1対1による自作問題と、その解き方の比較をメールの送受信を通して行わせた。そのことで、相手がどのように問題の解決に至ったのか、あるいは、相手を納得させるためにどのような工夫をして説明すればよいのかを、自分で判断して表現する必要が生まれた。情報通信ネットワークのツールとして、沖縄県の離島へき地の児童生徒の学習を支援し、本県教育の課題である「確かな学力の向上」と「情報活用能力の育成」を図ることを目的に沖縄県立総合教育センターに構築された「美ら島e-net（遠隔学習）システム」を利用した。おもに、電子メールで問題及び解き方を送受信し合い意見交換をさせ、テレビ会議で活動の様態を常時中継した。生徒は自校の教師へデータを送信し、教師が相手の生徒へデータを送信した。そのことで、情報のやり取りに時間がかかるものの、教師が生徒の作成した電子文書をすべてチェックでき、明らかな入力ミスや相手の誤解を生みそうな表現などを防ぐことができた。

生徒の振り返りレポート（表5）からわかるように、遠隔地にいる生徒との情報通信ネットワークを介した数学的活動により、必要に応じて式を変形することのよさや、解決の見通しが立たない場合に面積図を移動させるなど、問題解決へ結び付くような手立てを得ることができた。そのことで、自分では気付かなかった新しい視点がもたらされ、自身の思考を振り返り発展させる

ことができた。ゆえに、数理的に考察し表現する能力を高めることに有効であると考える。

表5 作問し発信する学習における振り返りレポート

気づいたこと・感想	考察
①メールのやり取りをしているうちに、2次方程式を解く場面で、解の公式を用いる前に、共通因数で両辺をわることにより、計算が楽になることがわかった。	解き方を比較することで、問題の解決へ結び付くような視点もたらされ、思考が深まっている。
②面積に関する問題で、すぐに解決できそうにない場合は、取りあえず面積図を移動させてみるなどの工夫をして問題が解けることに気付いた。	
③生徒C（喜瀬武原中）さんの解き方を見て、問題によっては、2次方程式を使わなくても楽に解けることに気付いた。	多様に考えることの大切さが認識できている。
④解の吟味をすることで計算を確かめられるので、大切だと思った。	相手がいることで問題の精度を高めている。

(3) 数理的に考察し表現する能力の高まりの実感

これまで、集合学習と作問し発信する数学的活動により、数理的に考察し表現する能力を高める指導の有効性を示した。事前と事後の生徒アンケートから、「数理的に考察すること」に関する質問においては、両生徒ともに高まりを実感している（図5）。それに対して、「数学的に表現すること」に関しては、異なる結果が得られた。原因の一つとして、作問し発信する学習では、2次方程式に関する問題とその解き方を電子文書として作成させたので、根号や文字式を含む分数などの入力に苦慮したことが挙げられる。両生徒ともに、自分の思いや考えを伝えたり、筋道立てて分かりやすく表現したりすることに関しては、十分満足するところへは至っていないが、授業での様子やノートの記述などから、数学的に表現する力は高まっていると考える。今回実施した集合学習や発信する学習などの、他校の生徒との数学的コミュニケーションの機会を増やすことで、生徒自身が表現の質の高まりを感じ、数理的に考察し表現する能力の高まりを実感できると考える。

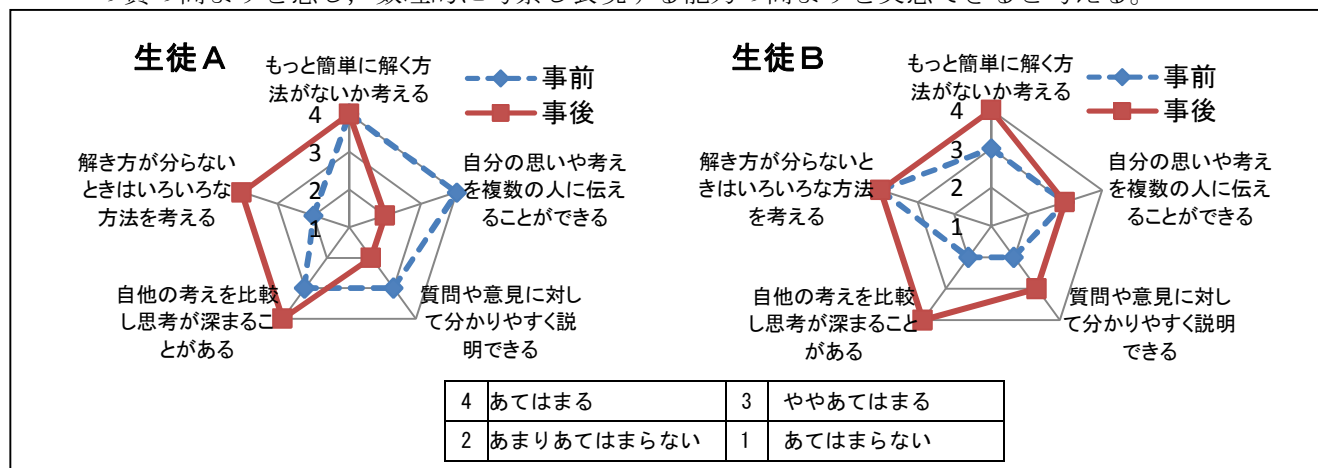


図5 数学の学習に関するアンケート（事前と事後）

IV 成果と課題

1 成果

- (1) 集合学習による小集団で、説明し伝え合う数学的活動を充実させることで、自分とは異なる考え方に触れ、多様な考え方が身に付き、数理的に考察し表現する能力を高めることができた。
- (2) 作成した問題を離れた相手へ発信し合い、解き合ったり説明し合ったりする活動を充実させることで、数学的な表現を工夫することになり、数理的に考察し表現する能力を高めることができた。
- (3) 他者と関わる活動を通して、数理的に考察し表現することのよさを認識できた。

2 課題

- (1) 集合学習や作問し発信する数学的活動の計画的な実施が必要である。
- (2) ネットワークのセキュリティ環境の改善や、パソコン及びその周辺機器等の整備の充実が必要である。

〈主な参考文献〉

- 柏元新一郎 2009 『「数学的な表現力」を育成する授業モデル』 明治図書
 文部科学省 2008 『中学校学習指導要領解説数学編』 文部科学省
 全国へき地教育研究連盟 1995 『へき地教育ガイドブック』 サンアイ企画