〈数学〉

生きて働く微分法の知識及び技能を習得する指導の工夫

――数学ソフトウェア「GeoGebra」を用いた数学的活動を通して（第２学年）――

沖縄県立糸満高等学校教諭　洲　鎌　啓　祐

Ⅰ　テーマ設定の理由

『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』（以下『解説数学編』）では、数学科における知識及び技能の習得について「知識及び技能を，試行錯誤などもしながら主体的に用いるとともに，（中略）統合的・発展的に考察したりするよう配慮することが大切である。数学的活動を通した概念や原理・法則の理解に裏付けられた発展性のある知識及び技能こそが，生きて働く知識や技能なのである。」と述べている。知識や技能は様々な場面で活用することによって他の知識と統合され、より広い範囲で応用の利く有用性の高い知識・技能に発展していく。生きて働く知識及び技能を習得するには、問題を発見・解決し振り返って考察するという数学的活動の中で、知識や技能を主体的に活用しながら学ぶことが必要である。

私が現在受け持っている沖縄県立糸満高等学校２学年普通クラスでは、今年度９月に実施した実力テストで数学Ⅱ「図形と方程式」の単元の基礎問題平均正答率が 20.5％となり、基本的な知識及び技能の習得に課題が見られた。また、同時に行われたアンケートによると、数学の学習で「問題を解くとき図やグラフをかいて考える」という質問に対して肯定的な回答をした同クラスの生徒は 28.4％であり、問題解決にグラフを活用できる生徒が少ないことがわかる。関数・座標幾何分野の知識及び技能が定着していない要因として、日々の授業が問題の解き方の指示と演習といった指導に終始しており、関数とグラフの関係を主体的に考察するような生徒の数学的活動を起こす教師の手立てが不足していることが考えられる。

このような状況を改善し、日々の授業における数学的活動を活性化する方策の一つとして、ＩＣＴの活用が考えられる。実際、今回の学習指導要領では主に関数分野で「コンピュータなどの情報機器」の活用についての記述が大幅に増えており、これらの積極的な導入を推奨していることが読み取れる。中でもグラフ作成ソフトウェア、例えば Markus Hohenwarter 氏（ヨハネス・ケプラー・リンツ大学教授）の開発した「GeoGebra（ジオジェブラ）」などはグラフの変化を動的に見ることができるため、生徒の興味関心を引き、直観的理解を深める効果が期待できる。これまでは教師が機器を操作し、その画面をスクリーンに映しながら解説するといった指導がよく行われていたが、スマートフォンやタブレットが普及した現在は生徒一人ひとりが自分の手でソフトを操作することが可能になった。生徒が自分の端末でグラフを表示し、その直観的イメージによって問題の意味を把握したり、得られた結論をグラフ上で検証したりするなど様々な場面での活用が考えられ、適切に導入すれば生徒の数学的活動を支援するツールとして有効に機能すると思われる。

本研究では２学年普通クラスを対象に、GeoGebra の操作法を伝えたうえで数学Ⅱ「微分法」の単元の授業を行う。授業の中で GeoGebra を操作する活動を適宜取り入れ、グラフの様子を確認しながら問題を解くことで、微分法とグラフの関係を統合的に考察していく。このような数学的活動を通して、生徒が微分法をより有用性の高い「生きて働く知識及び技能」として習得することを目標とし、本テーマを設定した。

〈研究仮説〉

数学Ⅱ「微分法」の単元において、数学ソフトウェア「GeoGebra」を用いた数学的活動を通して学習することで、生きて働く微分法の知識及び技能を習得することができるであろう。

Ⅱ　研究内容

１　生きて働く微分法の知識及び技能とは

中央教育審議会答申第 197 号（平成 28 年 12 月 21 日）では「生きて働く『知識・技能』の習得」の内容として「個別の事実的な知識のみを指すものではなく、それらが相互に関連付けられ、さらに社会の中で生きて働く知識となるものを含むものである。」と示している。ここから「生きて働く知識・技能」とは、知識が互いに関連付けられた体系として理解しており、それらを行使する技能によって具体的な問題解決の場面で活用できるものと捉えることができる。

これをもとに、本研究では「生きて働く微分法の知識及び技能を習得した生徒」を「微分法の知識をグラフの様子と関連付けて理解しており、また計算技能に習熟し、それらを活用して問題を解決することができる生徒」と定義して、このような生徒の育成を目指す。

２　数学的活動とは

『解説数学編』によると、数学的活動とは「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行すること」、具体的には日常生活や社会の事象、または数学の事象から問題を発見・解決し、結果を振り返って考察するなどの活動を指すものと示している。『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示)』では、数学科の目標として「数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を（中略）育成する」と述べられており、学習過程における数学的活動の内容は非常に重要であるといえる。

佐伯胖（1995）は、数学的原理を「『あたりまえだ』とわかるような『世界』を与えること」が大切であると述べている。人は誰しも日常の経験の中で素朴な数量感覚を身に付けており、それらと数学的原理が結びつく体験をすることで、知識及び技能が「当然のもの」として理解できるという。本研究でもこの論を参考にして、日常の事象の観察から微分法の概念を見出し、問題を探究する中で微分の計算法を構築する体験をすることができる世界（場面）を生徒に提示していきたい。そのような数学的活動を起こす手立てとして、GeoGebra を用いて教材開発を行った。

３　GeoGebra 教材による数学的活動

GeoGebra ホームページでは、このソフトウェアを「幾何、代数、表計算、グラフ、統計、解析をひとつの使いやすいパッケージにした（中略）動的数学ソフトウェアです。」と説明している。日本語のマニュアルがないが、北海道教育大学の平成 30 年度教員免許状更新講習「GeoGebra 入門」のテキストが Web で閲覧でき、参考になる。

本研究ではいくつかの基本的な機能を用いて教材を開発し、その教育効果を検証していく。作成した教材はＵＲＬで共有できるので、本研究で作成した教材についても共有ＵＲＬ及びＱＲコードを図中に掲載しておく。なお授業でソフトを操作する際の端末については、生徒自身が所有するスマートフォンを用いるＢＹＯＤ方式を想定している。

(1) 微分法の考え方を体験する GeoGebra 教材（教材１・教材２・教材３）による活動

①　微分法に関心を持たせるための導入教材（教材１）

微分法は、簡単な表現を使えば「数量の変化の勢いを捉える方法」といえる。例えばコロナ禍の現在、人々は日々の新規感染者数の推移を固唾をのんで注視しており、ニュースでは「拡大が続いている」「高止まりしている」「減少に転じた」といった言葉が盛んに飛び交っている。このような数量の変化の「勢い」の強さを、曲線の接線の傾きの値によって定量的に表すことができるのが、微分法の有用性の一つである。

この概念を生徒に伝え、微分法に関心を持たせる目的で図１の教材１を作成した。2021 年沖縄県コロナ新規感染者数の推移を模式的に表す曲線上で点Ｐをタッチして動かすと、点Ｐにおける接線が動的に変化し、その傾きの値が連動して表示される。傾きの数値が大きいほどその点の前後で感染者が激しく増加しているといえるので、これによって第４波と第５波を観察・比較するといった活動を行い、接線の傾きが数量の変化の勢いを捉えるのに有効であることを実感させる。

作成方法の概略

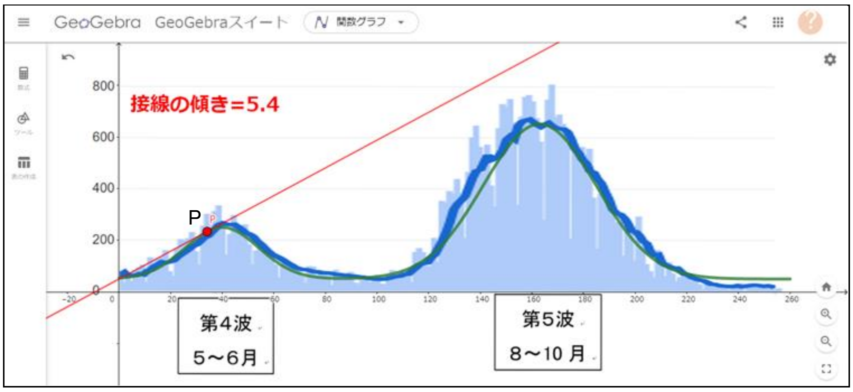
①ツールの「画像を挿入」ボタンでコロナ新規感染者数グラフ画像(google より)を背景に設定。

②曲線に沿うグラフをもつ関数 f(x)を考案して入力。(今回は正規分布曲線をヒントに、f(x)=exp(−x^2) を加工して作成)

③P(a,f(a))を入力し、曲線上の点 P を表示。

④ツールの「接線」ボタンで点 P における曲線の接線を引く。

⑤f´(a)を入力し、「テキストを挿入」ボタンの上級コマンドで f´(a)の値を参照して表示するよう設定。



使用した主なツール

:画像を挿入 :接線 :テキストの挿入

共有 URL: https://www.geogebra.org/calculator/y2xnfsrq

QR コード→

図１　教材１　微分法に関心を持たせるための導入教材

②　接線の傾きの求め方を探究し、微分係数を導入するための教材（教材２）

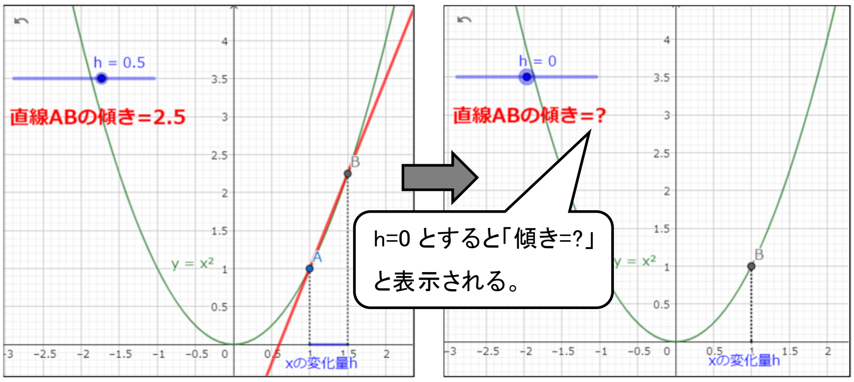
教材１から「では、接線の傾きの値はどうすれば求められるのか」という疑問が発生し、接線の傾きの求め方を探究する活動に進む。図２の教材２は、曲線 $y=x^2$ 上の点Ａ(1, 1)における接線の傾きを考える教材である。スライダーをタッチで操作しパラメータ h を 0 に近づけることによって点Ｂ$(1+h, (1+h)^2)$が点Ａに近づき、直線ＡＢは求める接線に近づく。しかし h=0 とすると、２点Ａ、Ｂが一致して直線ＡＢが定義できなくなり、その傾きの値も「？」と表示される。この観察から「h を 0 に近づけると直線ＡＢは接線に近づき、その傾きは一定の値に近づく。しかし h=0 とすると直線が定義できない」という事実が確認され、「h の値を、0 と異なる値をとりながら 0 に限りなく近づける」という新たな数量操作の必要性が生じる。この操作を表現する記号として極限値 $\lim_{h \to 0}$ を導入し、これによって接線の傾きの求め方が定式化され、微分係数の定義に至る。

作成方法の概略

①$y=x^2$、A(1,1)、B$(1+h,(1+h)^2)$、C(1,0)、D(1+h,0)を入力。C、D は非表示にしておく。また、パラメータ h が自動で設定されるので、h のスライダーを画面内に表示する。

②「２点を通る直線」ボタンで直線 AB を表示。また「２点を結ぶ線分」ボタンで線分 AC、BD、CD を表示。AC、BD は点線にし、CD の名前は「x の変化量 h」とする。

③「$\{(1+h)^2−1\}/h$」を入力し、「テキストの挿入」ボタンの上級コマンドで参照して表示させる。



使用した主なツール

:2点を通る直線 :2点を結ぶ線分 :テキストの挿入

共有 URL: https://www.geogebra.org/calculator/kvcumwhs

QR コード→

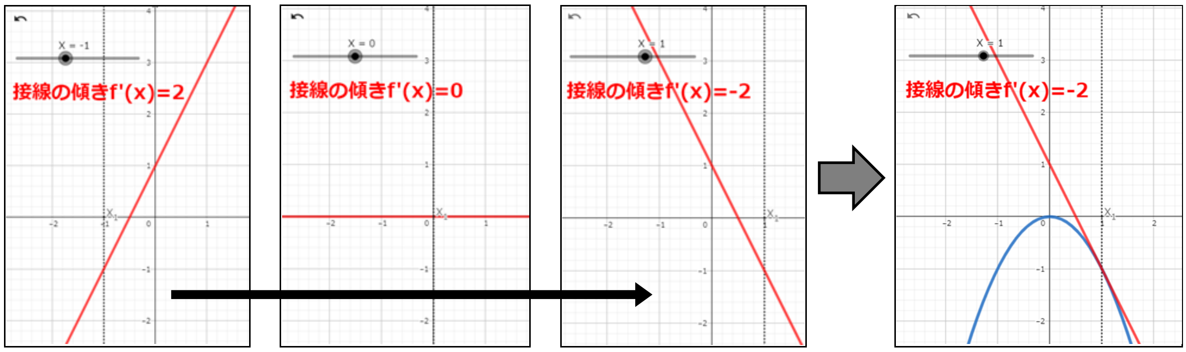
図２　教材２　接線の傾きの求め方の探究

教材１・教材２を通して、生徒は微分法の体系が構築されていく過程を体験する。これによって、微分係数の意味をその幾何的イメージと結び付けて習得することができると考える。（なお、本来は微分係数を定義した後でなければ一般的な接線は定義できない。教材１では既習事項である円や放物線の接線をもとに、直観的イメージで接線を説明する。）

③　導関数を用いて関数の値の増減を調べる方法を理解するための教材（教材３）

微分法の単元の後半では、導関数を用いて関数の値の増減を調べる方法を学ぶ。これを体験することを目的として、図３の教材３「グラフの形当てクイズ」を考案した。この教材は教師の端末で操作し、それをスクリーンで見せて生徒に考えさせるものとする。

関数 f(x)とその導関数 f´(x)を入力した後、f(x)のグラフを非表示にして、導関数 f´(x)の値だけを表示する。教師が x の値を変化させ、生徒は f´(x)の値の推移から元の曲線の形を想像する。ヒントとして接線だけを表示し、導関数の値によって接線の様子がどう変化するか確認しても良い。生徒の答えが出たら、グラフを表示して答え合わせをする。再びグラフを非表示にしてその場で関数 f(x)を入力し直せば、第２問、第３問…と続けることができる。このクイズを通して「ある区間で常に導関数の値の符号が正ならば関数は増加し、負ならば減少する」ということを学習し、増減表やグラフの概形をかく指導につなげていく。



スライダーで x の値を動かし、f´(x)の値を連続的に変化させていく。
（ヒントとして接線を表示）

グラフを表示して正解を示す。

作成方法の概略…本文を参照　　共有 URL: https://www.geogebra.org/calculator/kvcumwhs　　QR コード→

図３　教材３　グラフの形当てゲーム

(2) GeoGebra を用いて計算結果の図形的意味を確認する活動

『解説数学編』では「技能は，数学的な概念や原理・法則と一体的なものとして学ばれるものであることにも留意することが大切である。」と述べ、計算の技能が形式的なパターン暗記に陥らないよう注意している。

そこで、問題を解いたときに GeoGebra でその図形的意味を確認する活動を取り入れる。例えば図４のように導関数を用いて微分係数を求める問題であれば、生徒に GeoGebra の入力を指示して曲線と接線を表示し、接線の傾きの値と計算結果が一致するか確認させる。この作業によって「微分係数は曲線の接線の傾きに等しい」という事実が再確認されることとなり、計算結果と図形的イメージが関連付けられ、微分法の知識をより体系的に理解することができると考える。この活動は、主に問題演習の場面で取り入れていく。

例題　関数 $f(x)=x^2$ の導関数 f´(x)を求め，
　それを用いて微分係数 f´(-2)を求めよ。

解）
　f´(x)=2x より f´(-2)=2(-2)=<u>-4</u>

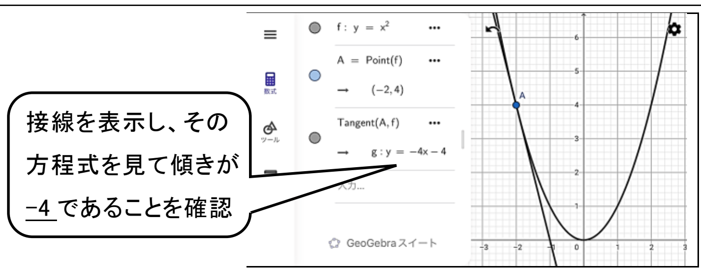


図４　GeoGebra による計算結果の図形的意味の確認

Ⅲ　指導の実践

１　単元名

数学Ⅱ　５章　微分と積分

１節　微分係数と導関数　２節　導関数の応用（東京書籍　数学ⅡStandard）

２　単元目標

(1) 微分係数や導関数の意味について理解し、それらを求めることができる。また、導関数を用いて関数の値の増減や極値を調べ、グラフの概形をかく方法を理解する。　【知識及び技能】

(2) 関数の局所的な変化に着目し、事象を論理的に考察することができる。また、数学的な表現を用いて事象を的確に表現することができる。　【思考力，判断力，表現力等】

(3) 具体的な事象の考察を通して微分法の有用性を認識し、それを積極的に活用して問題を解決しようとしている。また、問題解決の過程を振り返って考察を深めようとしている。

【学びに向かう力，人間性等】

３　単元の評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
①平均変化率や微分係数、導関数の意味について理解し、それらを求める事ができる。 ②導関数を用いて関数の値の増減や極値を調べ、グラフの概形をかく方法を理解している。	①関数の局所的な変化に着目し、問題を解決する方法について考察している。 ②数学的な表現を用いて事象を的確に表現している。	①微分法の有用性を認識し、積極的に問題解決に活用しようとしている。 ②問題解決の過程を振り返って考察を深めようとしている。

４　単元の実際と評価計画（全９時間）

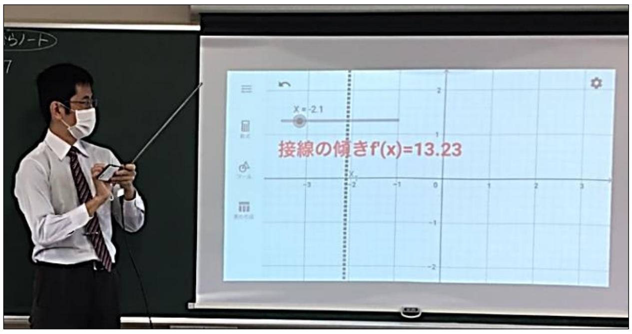
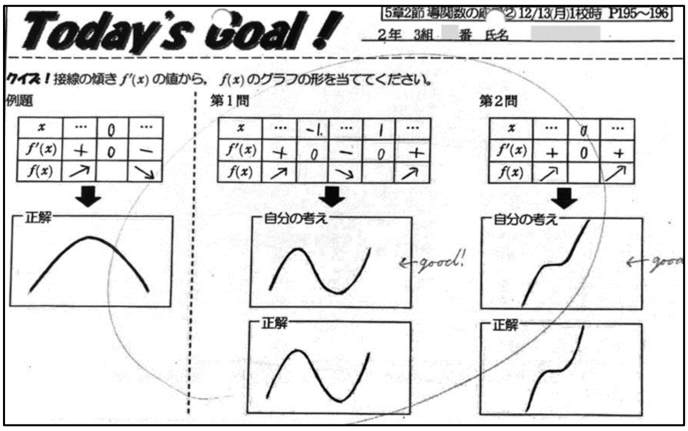
時	ねらい	学習活動	評価規準（評価方法）
1	微分法の概念を導入し、その有用性を認識する。また、平均変化率について理解する。	教材1を用いて、新型コロナウイルス新規感染者数の変化率を、グラフの接線の傾きの値によって観察する。また、グラフの変化率を求める手立てとして、平均変化率を理解する。	思①・態①（ワークシート）
2	平均変化率と極限値による微分係数の定義を理解し、それに基づいて微分係数を求めることができる。	教材2を用いて、平均変化率のxの変化量hを限りなく0に近づける様子を観察する。また平均変化率の極限値として微分係数を定義し、与えられた関数における微分係数やグラフの接線の傾きを求める。	思①・知①（ワークシート）
3	導関数の定義を理解し、それに基づいて微分係数を求めることができる。	導関数を定義し、それを用いて微分係数が求められることをGeoGebraを用いて確認する。また、定義に基づいて与えられた関数の導関数を求める。	知①（ワークシート）
4	導関数の性質を用いて、多項式関数を微分することができる。	$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$、$\{kf(x)\}'=kf'(x)$、$(x^n)'=nx^{n-1}$ 等の導関数の性質を用いて、与えられた関数を微分する。	知①（ワークシート）
5	導関数を用いて微分係数を計算することができる。	与えられた関数を微分して導関数を求め、それを用いて微分係数を計算する。	知①・態②（ワークシート）
6	導関数を用いて曲線の接線の方程式を求めることができる。	導関数を用いて与えられた曲線上の点における接線の傾きを求め、それをもとに接線の方程式を求める。また、GeoGebraを用いて求めた直線が曲線に接するかどうか確認する。	知①・態②（ワークシート）
7	導関数の値の符号と関数の増減の対応関係を理解し、関数の増減を調べることができる。	教材3「グラフの形当てクイズ」を通して、導関数の値の符号と関数の増減の対応関係を理解し、与えられた関数の増減表を作る。また、増減が正しく求められているかGeoGebraを用いて確認する。	思②・知②（観察・ワークシート）
8	関数の極値について理解し、それを求め、グラフの概形をかくことができる。	極値の意味について理解し、導関数を用いて与えられた関数の極値を求め、グラフの概形を書く。また、GeoGebraを用いて求めたグラフの概形が正しいかどうか確認する。	知②・態②（ワークシート）
9	これまでの学習内容を振り返る。	これまでに学んだ知識及び技能の習得を確認する単元テストを行う。また、アンケートによって学んだ事を振り返る。	知①②（単元テスト） 態①（アンケート）

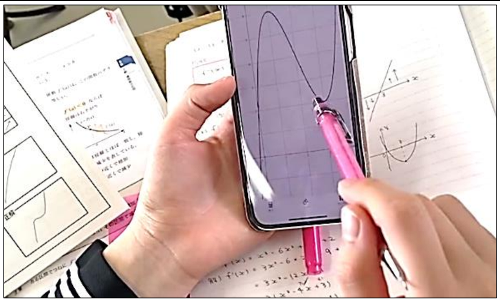
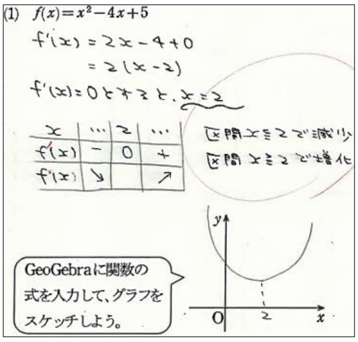
５　本時の指導（７／９時間）

(1) 本時の目標

導関数の値の符号と関数の増減の対応関係を理解し、関数の増減を調べることができる。

(2) 本時の展開

時間	学習内容と活動 （○教師の活動　●生徒の活動）	指導上の留意点	評価
導入 １０分	**クイズ 接線の傾きf´(x)の値から、f(x)のグラフの形を当ててください。** ○GeoGebraの画面をスクリーンに映し、f´(x)の値を変化させていく。  （↑「教材３」をスクリーンに映し、操作する様子） ●f´(x)の値の符号の変化をワークシートの表にまとめ、f(x)のグラフの形を考察する。  （↑授業後のワークシート）	・事前に作成しておいた「教材3」を教師の端末で読み込み、クイズを始める。 ・例題を通して f´(x)の符号を表に記入する方法を生徒に伝える。これは、この後の増減表の導入につなげる。 ・ワークシートには「自分の考え」と「正解」の欄を設け、自身の考察が正しいか検証できるようにする。	・f´(x)の値から考えられるグラフの形を的確に表現できる。 【思・判・表②】 (観察・ワークシート)
展開 ３８分	○クイズの考察から、f´(x)の符号と f(x)の増減の関係についてまとめる。 ある区間で常に　f´(x)＞0　⇒　f(x)は増加 ↗ 　　　　　　　　f´(x)＜0　⇒　f(x)は減少 ↘ **問3　次の関数の増減を調べよ。** (1) $f(x)=x^2-6x$　　(2) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ ○問3の解説を通して、f´(x)の符号を調べ増減表をかく方法を伝える。また、GeoGebra でグラフを表示して増減の考察が正しいか確認するよう指示する。	・増減表を作成する手順は長く、計算量も多いので丁寧に解説する。	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

（↑問3(2)の関数の式を入力し、グラフを表示する生徒の様子）
(ワークシート) $\boxed{1}$ 次の関数の増減を調べよ。
(1) $f(x)=x^2-4x+5$
(2) $f(x)=4x^3-12x+7$
●問3の方法を参考に問題を解く。また、各自のスマートフォンで GeoGebra を操作し、関数のグラフを表示して増減の考察が正しいか確認する。


（↑授業後のワークシート）
</td>
<td>・GeoGebra で実際にグラフを見ることで、f(x)の増減が正しく読み取れていることを確認する。

・増減表の書き方が分からない生徒や、GeoGebra の操作が上手くいかない生徒がいる場合は、机間巡視の際に個別に説明するなどの支援をする。</td>
<td>・導関数を用いて関数の値の増減を調べる方法を理解している。
【知・技②】
(観察・ワークシート)</td>
</tr>
<tr>
<td>まとめ
２分</td>
<td>●「今日の自己評価」記入</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Ⅳ 仮説の検証

研究仮説に基づき、生徒が GeoGebra を用いた数学的活動を通して学習することで「生きて働く微分法の知識及び技能」を習得することができたかどうかについて、授業観察とワークシート、及び検証前後のテストとアンケートの結果を基に検証する。

1 GeoGebra を用いた数学的活動についての検証

(1) 微分法の考え方を体験する GeoGebra 教材（教材１・教材２・教材３）による活動について

第１時で教材１、第２時で教材２を取り扱って、微分法の概念及び微分係数の導入を行った。教材１（図５）・教材２はそれぞれワークシートにＱＲコードを載せ、それを個人のスマートフォンで読み取らせる形で生徒に提供した。教師は GeoGebra の画面をスクリーンに映し、操作を指示して授業を進める。初めはソフトに戸惑う生徒も見られたが、次第に操作に慣れ、課題に取り組むことができた（図６）。

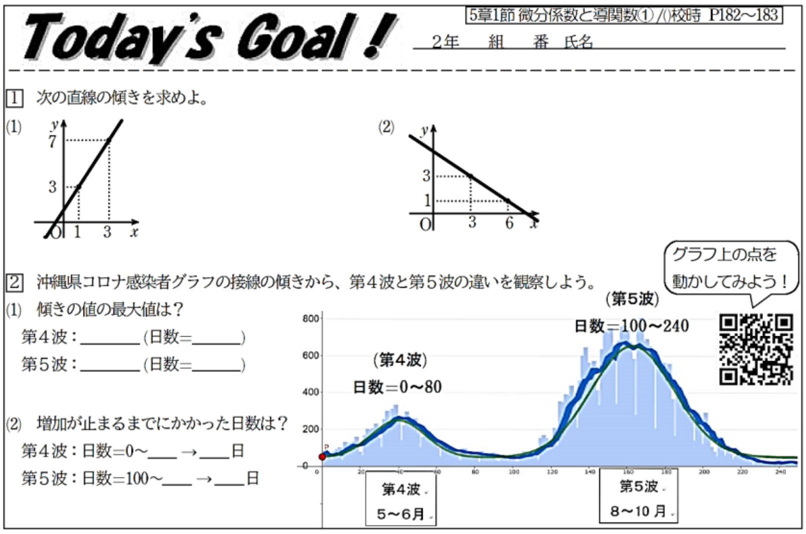


図５ 教材１のＱＲコードを載せた第１時ワークシート

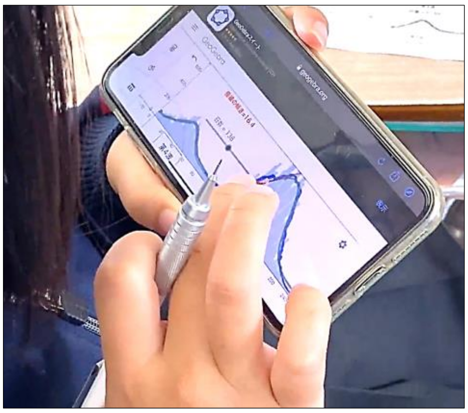


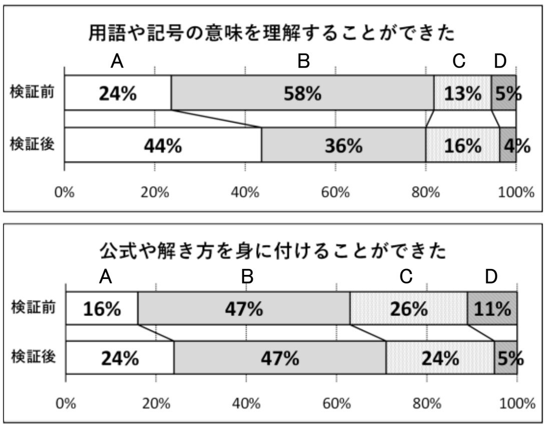
図６ 教材１を操作する生徒の様子

また第７時では、教材３を教師が操作し「グラフの形当てクイズ」を行って、導関数を用いて関数の増減を調べる方法を考察した。生徒は「スクリーンに表示される f´(x)の値の符号をワークシートの表にまとめ、グラフの概形を予想する」という課題に取り組み、多くの生徒が正解を出すことができた。（「５　本時の指導」参照）

数学の学習についての自己評価によるアンケート結果を分析し、授業で行った数学的活動の効果を検証する（図７）。検証の前後で、質問項目「用語や記号の意味を理解することができた」「公式や解き方を身に付けることができた」における「Ａ：当てはまる」の回答率がそれぞれ 20 ポイント、８ポイント増加し、また自由記述欄では「理解しやすかった」という回答が多数あった。これは、GeoGebra を操作してグラフの動的な変化を観察する体験をしたことで、微分法の知識理解が向上したためと思われる。

ただし、用語や記号の意味理解については「Ｃ：やや当てはまらない」の回答率も３ポイント増加しており、理解に不安がある生徒への支援の面では課題が残った。「操作が難しかった」という感想もあることから、ソフトの操作に時間がかかり、数学的な考察に結びつけられなかった可能性がある。ソフトの操作と考察・演習などの学習活動をバランスよく行えるよう授業内容を改善することが今後の課題である。

A:当てはまる　B:やや当てはまる
C:やや当てはまらない　D:当てはまらない　(N=55)



検証後の自由記述欄より抜粋

・「理解しやすかった」「解き方が分かった」(27 人)

アプリを使って、式も傾きも分かりやすくなって良かった！

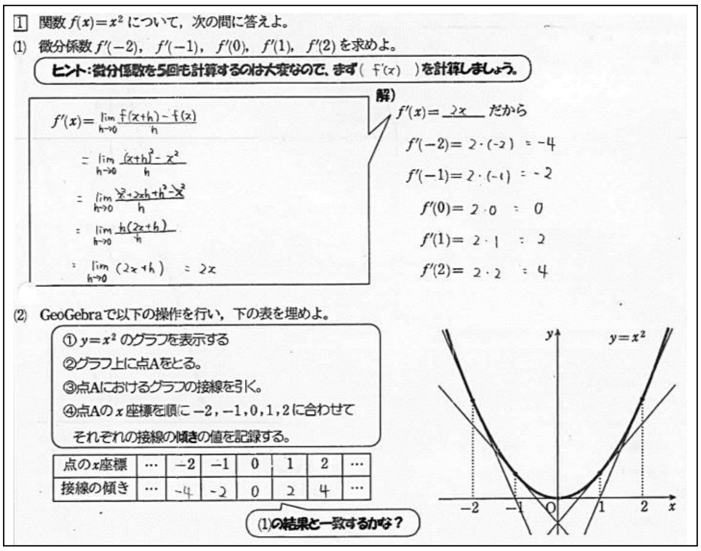
・「ソフトの操作が難しかった」(2 人)

使い方がいまいち分からない

図７　数学の学習についてのアンケート結果①

(2) GeoGebra を用いて計算結果の図形的意味を確認する活動について

第３時・第６時・第７時・第８時では、問題を解いた際に計算結果の図形的意味を GeoGebra で確認する活動を行った。第３時では導関数を導入した後に、導関数を用いて計算した微分係数の値と GeoGebra で実際に表示した接線の傾きの値が一致するか調べ、導関数の有用性を確認した（図８）。また第６時・第７時・第８時では問題演習の場面において、計算で求めた接線の方程式や関数の増減、グラフの概形が正しいかどうか、各自で GeoGebra に関数の式を入力して確認する活動を行った（図９）。


① 関数 $f(x)=x^2$ について，次の問に答えよ。

(1) 微分係数 $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ を求めよ。

ヒント：微分係数を5回も計算するのは大変なので，まず（ f'(x) ）を計算しましょう。

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{h(2x+h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$

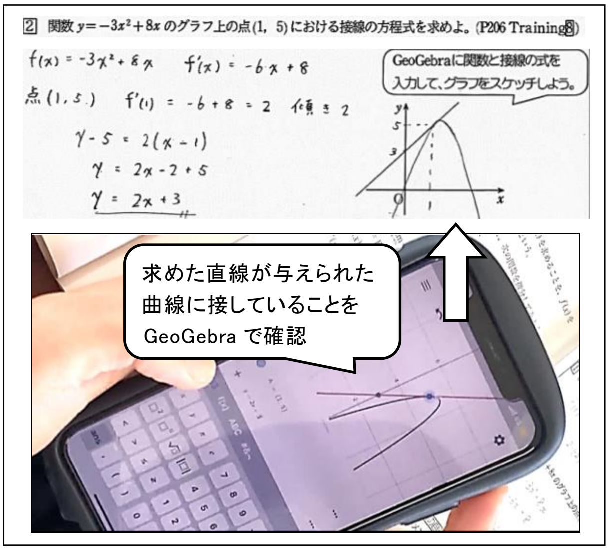
解）$f'(x)=2x$ だから
$f'(-2)=2\cdot(-2)=-4$
$f'(-1)=2\cdot(-1)=-2$
$f'(0)=2\cdot0=0$
$f'(1)=2\cdot1=2$
$f'(2)=2\cdot2=4$

(2) GeoGebraで以下の操作を行い，下の表を埋めよ。
①$y=x^2$ のグラフを表示する
②グラフ上に点Aをとる。
③点Aにおけるグラフの接線を引く。
④点Aの x 座標を順に −2，−1，0，1，2 に合わせてそれぞれの接線の傾きの値を記録する。

点のx座標	…	−2	−1	0	1	2	…
接線の傾き	…	−4	−2	0	2	4	…

(1)の結果と一致するかな？

図８　授業後の第３時ワークシート


② 関数 $y=-3x^2+8x$ のグラフ上の点(1, 5)における接線の方程式を求めよ。(P206 Training8)

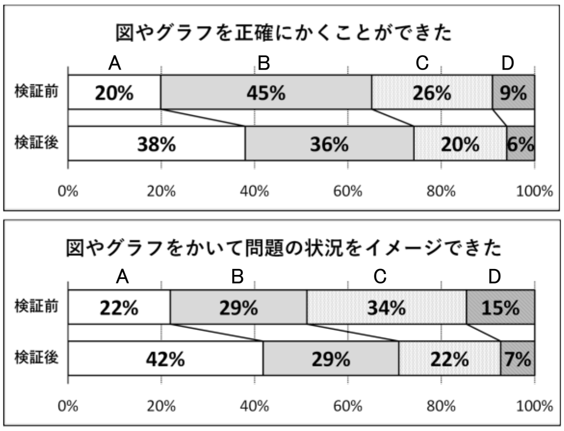
$f(x)=-3x^2+8x$　$f'(x)=-6x+8$
点(1, 5)　$f'(1)=-6+8=2$　傾き2
$y-5=2(x-1)$
$y=2x-2+5$
$y=2x+3$

図９　生徒による GeoGebra 入力の様子（第６時）

アンケートの結果を分析する（図 10)。検証の前後で「図やグラフを正確にかくことができた」「図やグラフをかいて問題の状況をイメージできた」の項目において「Ａ」の回答率がそれぞれ 18 ポイント、20 ポイント増加し、「Ｃ」「Ｄ」の回答率は減少した。また自由記述欄では「今までよりグラフがイメージできるようになった」という感想が見られ、グラフに対する苦手意識が緩和されている様子がうかがえた。これは、問題を解いたときにソフトを用いてグラフの様子を確認する活動を積み重ねたことで、計算とグラフの関係についての理解が深まり、グラフをかく技能が向上したためと思われる。

また、家庭学習の際に自発的に GeoGebra を活用する生徒も現れた。授業中の活動において生徒自身のスマートフォンを用いたことで、操作法に習熟し、使い方の幅を自ら広げていったものと思われる。グラフを用いて問題を考察することのよさを手軽に実感できることはソフトの利点の一つであり、それによって生徒の学習の質が改善したことも、知識理解や技能の向上に結びついたと推察される。

A:当てはまる　B:やや当てはまる
C:やや当てはまらない　D:当てはまらない　(N=55)



検証後の自由記述欄より抜粋

・「グラフのイメージがしやすくなった」(33 人)

今までは自分で図やグラフを
イメージしたり書くのが苦手だったけど、
今回の授業でグラフを正確に
書く力を身につけることができた

・「家庭学習でも GeoGebra を利用した」(2 人)

ワークの分からない問題も
これで解決できて、助かった。

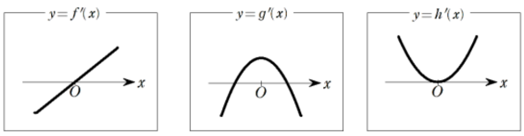
図 10　数学の学習についてのアンケート結果②

２　生きて働く微分法の知識及び技能の習得についての検証

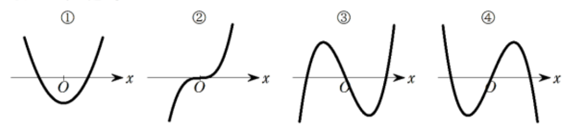
検証前後のテスト結果の分析により、知識及び技能の習得について考察する。検証前テストは微分法につながる関数分野の既習事項（変化の割合など）を中心に出題し、検証後テストは授業で取り扱った微分法の基礎的な内容から出題した。本研究で定義した「生きて働く微分法の知識及び技能」の習得度を測るため、出題内容は「基礎的な計算技能を測る問題」に加え、令和３年度全国学力・学習状況調査の中学校第３学年数学における「知識・理解」「数学的な見方や考え方」を測る問題、及び令和３年度大学入学共通テストの問題を参考に、「グラフと関連付けた関数の知識理解を測る問題」「関数の知識を活用して課題を解決する力を測る問題」を検証前後のテストにそれぞれ１問ずつ設問した（図 11)。

グラフと関連付けた関数の知識理解を測る問題

３つの関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ があり，それぞれの導関数 $f'(x)$，$g'(x)$，$h'(x)$ のグラフ $y=f'(x)$，$y=g'(x)$，$y=h'(x)$ はそれぞれ次の図のようになった。**【各３点】**



このとき，$y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ のグラフはどのような形になるか。次の①～④のうちからそれぞれ１つずつ選べ。



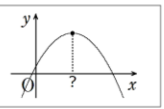
$y=f(x)$ のグラフ…(　　)，$y=g(x)$ のグラフ…(　　)，$y=h(x)$ のグラフ…(　　)

関数の知識を活用して課題を解決する力を測る問題

太郎さんと花子さんは，先生から与えられた次の課題に取り組んでいる。２人の会話が正しい内容になるように，$\boxed{ア}$～$\boxed{キ}$ に０～９の数字を１つずつ入れよ。**【ア・イウエ・オカキ→各３点】**

課題

放物線 $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{10}$ の頂点の x 座標を求めよ。



太郎：二次関数を平方完成すれば頂点の座標を求められるけど，計算が大変そうだなあ…。

花子：最近習った**微分**が使えるかも。頂点における放物線の接線の傾きは $\boxed{ア}$ になるから，それを利用して頂点の x 座標が求められないかな。

太郎：そうか。$y'=\boxed{ア}$ となる x の値を求めればいいんだね。

ではまず y' を求めよう。y を x で微分すると $y'=-\boxed{イ}x+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ だ。

花子：$y'=\boxed{ア}$ となる x の値を求めると $x=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$

よって，この放物線の頂点の x 座標は $\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ だね。

図 11 検証後テストの設問の一部（検証前テストにも同じ傾向の問を出題している）

検証前後の正答率を習熟度標準クラス 25 人と発展クラス 30 人に分けて分析する（図 12）。いずれのクラスにおいても全ての観点で正答率の上昇が見られたことから、今回の実践が学力層を問わず有効であったことがうかがえる。観点別に見て正答率が最も上昇したのは、標準クラスでは「関数の知識を活用して問題を解決する力」（14 ポイント増）、発展クラスでは「グラフと関連付けた関数の知識理解」（16 ポイント増）であった。本研究で行った数学的活動を通した学びは、特にこれらの能力の向上に効果的であったと思われる。

観点	標準クラス(N=25)			発展クラス(N=30)		
	検証前		検証後	検証前		検証後
基礎的な計算技能	34%	→	39%	61%	→	68%
グラフと関連付けた関数の知識理解	23%	→	31%	28%	→	44%
関数の知識を活用して課題を解決する力	24%	→	38%	51%	→	58%
総合正答率	30%	→	37%	54%	→	62%

図 12　検証前後のテストの正答率の変化

特に大きな変容の見られた、標準クラスの生徒Ａに着目する（図 13）。検証前後で総合正答率が 43 ポイント増加し、順位も下位から上位へと上昇して、発展クラスの生徒と同等の成績をとった。アンケートでは「$\lim_{h\to 0}$の意味を理解していた」「傾きの値からグラフを予想することができた」と記述しており、教材２（$\lim_{h\to 0}$の導入）や教材３（グラフの形当てクイズ）で扱った内容がしっかり身についていることが読み取れる。さらに計算技能の向上も見られるが、これは知識理解の深化によって演習の効果が上がったためと推察する。様々な数学的活動の積み重ねによって知識と体験を結びつけ、定着につなげることができた。

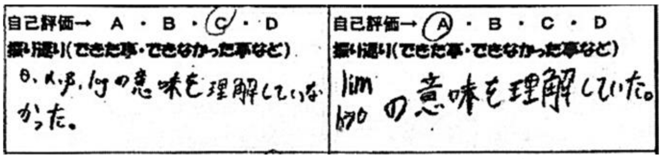
以上の考察から、GeoGebra を用いた数学的活動は、生きて働く微分法の知識及び技能の習得に有効であると考えられる。今後は実社会での問題解決の場面や発展的な課題を扱った学習を取り入れるなど、これらの知識・技能を更に深める工夫を考えたい。

検証前後のテスト正答率

観点	検証前		検証後
基礎的な計算技能	17%	→	56%
グラフと関連付けた関数の知識理解	0%	→	67%
関数の知識を活用して課題を解決する力	50%	→	100%
総合正答率	23%	→	66%
順位(55人中)	43位	→	19位

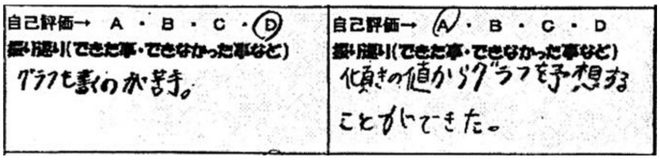
アンケート回答（抜粋）

用語や記号の意味を理解することができた



(検証前)　→　(検証後)

図やグラフをかいて問題の状況をイメージできた



(検証前)　→　(検証後)

図 13　生徒Ａ（標準クラス）の変容

Ⅴ　成果と課題

１　成果

(1) GeoGebra を操作してグラフの動的な変化を確認したことで、微分法の公式や解き方が身に付き、図やグラフをかく技能、図やグラフをかいて問題の状況をイメージする力が向上した。

(2) GeoGebra を用いた数学的活動を通して学習したことで、グラフと関連付けた微分法の知識理解が深まり、計算技能とそれらを活用して問題を解決する力が向上して、生きて働く微分法の知識及び技能の習得に一定の成果が見られた。

２　課題

(1) 微分法の知識理解に不安のある生徒を支援するため、ソフトの操作と考察・演習などの学習活動をバランスよく行えるよう授業内容を改善する。

(2) 微分法の知識・技能を更に深めていけるよう、実社会での問題解決の場面や発展的な課題を扱った学習を取り入れるなどの工夫を行う。

〈参考文献〉

文部科学省　2019　『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示)』　東山書房

文部科学省　2019　『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』　学校図書

田村学　2018　『深い学び』　東洋館出版社

奈須正裕　2017　『「資質・能力」と学びのメカニズム』　東洋館出版社

吉田昭史／編著　2011　『「わかる」授業をつくる中学校数学科　教材研究＆授業デザイン』　明治図書

佐伯胖　2003　『「学び」を問いつづけて　授業改革の原点』　小学館

佐伯胖　1995　『「学ぶ」という事の意味』　岩波書店

佐伯胖　1995　『「わかる」という事の意味　新版』　岩波書店

〈参考 Web サイト〉

中央教育審議会　「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申)」
https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_0.pdf（最終閲覧 2022 年２月）

星野将直　2000　「数学的知識の獲得・形成におけるメンタルモデルの役割に関する研究」
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjsme/82/5/82_3/_pdf/-char/ja（最終閲覧 2022 年２月）

北海道教育大学　「平成 30 年度教員免許状更新講習 GeoGebra 入門」
https://alg.kus.hokkyodai.ac.jp/2018/koshin2018dec.pdf（最終閲覧 2022 年２月）

Markus Hohenwarter　「GeoGebra」
https://www.geogebra.org/（最終閲覧 2022 年２月）